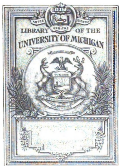
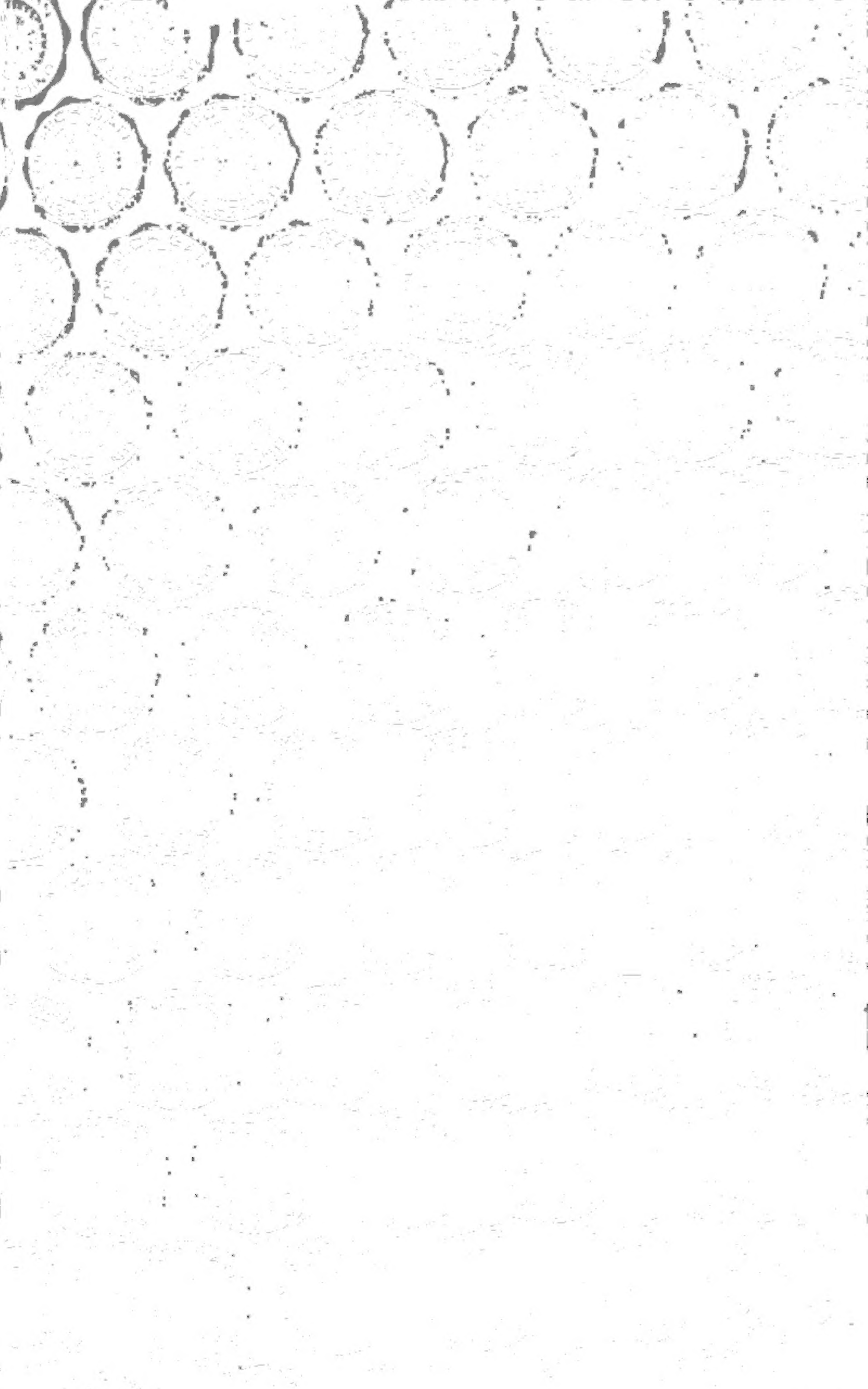

1817
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR



ANDREÆ TACQUET

Soc. Jesu Matheseos Prof.

ARITHMETICÆ

THEORIA,

ET

PRAXIS

Editio novissima, præcedentibus nitidior, & emendatior, cui accessit

NICOLAI DE MARTINO

DE PERMUTATIONIBUS, ET COMBINATIONIBUS

OPUSCULUM.

MEDIOLANI,
Excudit FRANCISCUS AGNELLI
ANNO MDCCXLI.
PUBLICA AUCTORITATE, AC PRIVILEGIO.

AD LECTOREM.

ACQUETI *Arithmeticam, sæpius recusam, denuo tibi sisto, Benevole Lector; quum saltem in nostris hisce regionibus difficile esset eam comparare. Non hic te moror in operis Auctore laudibus prosequendo; quippe quem, & sua in inveniendo subtilitas, & ejusdem in exponendo solertia jam omni fecit laude majorem. Multo minus Editionem hanc meam tibi commendo; nam quantum præcedentibus sit nitidior, & emendatior, vel ex sola earum collatione liquebit. Id unum monitum te volo, Editioni huic operam dasse præclarissimum Juvenem Nicolaum de Martino, qui in illustri Lyceo Neapolitano magno applausu publice Mathesim*

profitetur. Quumque eum rogassem, ut non sineret, adeo praeclarum opus sine aliquo comitatu iterum in lucem prodire, cogitabat ille brevi Algebrae specimine novam ejus Editionem ornare. Sed deinde opusculum de Permutationibus, & Combinationibus, in calce Operis jam appositum, composuit; quia doctrina ista, adeo utilis, visa est ei leviter ab Auctore pertractata. Interim loco speciminis integram, omnibusque numeris absolutam Algebram tibi parat, quae propediem lucem adspiciet; quumprimae ejus paginae jam sub praelo reperiantur. Vale.

SYLLABUS
LIBRORUM, AC CAPITUM.

ARITHMETICÆ.

LIBER SECUNDUS.

Logiſtica fractorum numerorum.

LIBER TERTIUS.

De Radicum extractione.

fractis

LIBER QUARTUS.

De Regulis.

LIBER QUINTUS.

De Progressionibus.

De Progressione Arithmeticâ.

De Progressione Geometricâ, cum finitâ, tum infinitâ.

Ad Bibliopegum.

Figuras omnes operis calci apponendas censeo, ita quidem, ut ad usum extra pagellas explicatæ promineant.

ARIT-

ARITHMETICÆ PROLEGOMENA.

Rithmetica est pars Mathematicæ, extructa ex principiis nobiscum natis, occultas numeri proprietates, & intricatas rationes rectè, & facilè explicare docens.

Adjuncta Arithmeticæ, alia sunt communia toti Mathematicæ, ea scilicet, quæ sequuntur; alia sunt ipsi propria, quæ ista subsequentur.

1. Arithmeticæ, sicut & Mathematicæ, thesaurus tantus est, ut nemo unquam illum totum exhaurire potuerit. Omnes enim artifices de seipsis fateri coguntur, quod Solon de seipso testatur, cum ait.

Assiduè discens plurima, fio senex.

2. Arithmetica, sicut & Mathesis, est maxima Sapientiæ humanæ pars, & certitudine artes omnes, ut Medicinam, Militarem, & alias; ordine vero Ethicam antecedit. Per demonstrationes enim acquiritur, & una ex speculativis est: objecti verò ratione media est inter speculativas, Physicam superans, superata à Metaphysica.

3. Maxima beneficia maximâ ingratitudine compensantur, ait historicus. Idem & Arithmeticæ, sicut Mathematicæ, sæpè accidit, quam

quam de omnibus optimè meritam multi non tantùm negligunt; ſed & ut inutilem contemnunt.

4. Quælibet terra artem alit: aliæ verò regiones aliam in primis. Sic Arithmeticam præcipuè Phænices, Geometriam Ægyptii, Aſtronomiam Chaldæi, Græci univerſam Mathematicam excoluiſſe traduntur; inter quos Plato, Vir ſapientiſſimus Græciæ extitit.

5. Arithmetica, ut Mathematica, una antiquiſſimarum ſcientiarum eſt. Nam & Veteres illam docebant, diſcebant, exercebant, priuſquam vel Phyſica, vel Ethica, vel Logica eſſet: & inventis etiam his, & aliis artibus, aut ſcientiis, ab hac initia ſtudiorum ducebant: eruditionis verò abſolutionem à Phyſicis, & Politicis petebant. *

1. Arithmetica omnium Mathematicarum prima eſt, & veluti parens, dux, & domina. Hac enim ſublatâ, evaneſcunt & cæteræ: ſed non contra, ſublatis cæteris, etiam hæc ipſa evaneſcit.

2. Nullius artis tam frequens, quàm Arithmeticæ, actio eſt. Hæc agit, ſive quis negotio, ſive otio ſe dedat: hæc operam dat ſtudioſo, tum pecuniæ, tum artium liberalium: hæc privatam, & publicam vitam agenti fidelem miniſtram ſe præbet.

3. Floruiſſe apud Phænices propter mercaturam, referunt hiſtorici: floret eadem etiamnum

* *Plura alia videri poſſunt in narratione hiſtorica de ortu, & progreſſu Matheſeos, Elementis Geometriæ ejuſdem Authoris præfixâ, Editione ultimâ Amſtelodami* 1701. *apud* F. van-der Plaats.

num in tabernis Mercatorum. Turpe igitur jacere ſpretam, atque neglectam in Scholis, quibu s ſcientiarum, & artium defenſionem, atque conſervationem Reſpublica commendavit.

4. Hæc diſciplina, ut mox incipiente mundo cœpit, ita nulli magis ætati, quàm primæ convenit: eamdem ob cauſam diſcenda inter ipſa ſtudiorum initia, & non poſt principia.

Objectum illius eſt numerus.

Species duæ: Vulgaris, & Coſſica. Hæc alterius temporis opus erit: Illa vero, de quâ nunc agitur, in duas partes dividetur, ſcilicet in Theoricam, & Practicam, ad quarum intelligentiam neceſſaria ſunt aliqua principia, ſive definitiones, & axiomata, nec non quædam adnotationes, quæ ſequuntur, & quæ ſparſim in hoc opere diſpergentur.

DEFINITIONES.

1. UNitas eſt, ſecundùm quam unumquodque eorum, quæ ſunt, unum dicitur.

Omnis numeri principium unitas eſt.

2. Numerus eſt compoſita ex unitatibus multitudo.

3. Numerus numerum metiri dicitur, cum minor aliquoties ſumptus majori æqualis ſit.

Num. 4. Metitur 12., quia ter 4. facit 12. Unitas metitur omnes numeros.

4. Numerus numeri multiplex eſt, cum minor metitur majorem, ſive cum major minorem aliquoties continet præcisè.

5. Pars

5. Pars aliquota numeri est, quæ numerum metitur: pars aliquanta, quæ non metitur.

Numerus 2. est pars aliquota 10. quia metitur 10. acceptus nimirum quinquies. 3. verò est pars aliquanta 10. quia non metitur 10. nam ter acceptus facit 9. acceptus quater facit 12.

6. Similes aliquotæ partes sunt, quæ sua tota æqualiter metiuntur; sive, quæ in suis totis æquè sæpe continentur.

10.	15.
2	3

2., & 3. *sunt similes aliquotæ numerorum 10., & 15., quia tam 2. in 10. quàm 3. in 15. continentur quinquies: sive tam 2. totum suum 10., quàm 3. suum totum 15. metiuntur per eumdem numerum 5.*

7. Similes partes aliquantæ sunt, quæ in suis totis æquè sæpe continentur, atque insuper æquè multæ ipsarum partes aliquotæ similes.

Vel partes aliquantæ similes sunt, quæ æquè multas suorum totorum continent aliquotas similes.

14	28
8	16

8 & 16. *sunt similes partes aliquantæ numerorum 14., & 28 quia sicuti 8 continetur semel in 14., atque insuper 6., seu ter 2. hoc est tres quartæ partes ipsius 8., ita 16 in 28. continetur semel, atque insuper 12., seu ter 4., hoc est etiam tres quartæ partes 16.*

Vel sic: 8, & 16. sunt similes partes aliquantæ totorum 14, & 28., quia sicuti 8 continet totius 14 quatuor septimas partes, nempe quater 2., ita 16 continet totius 28 quatuor septimas, nempe quater 4.

8. In numeris ratio, sive proportio est duorum numerorum mutua quædam habitudo secundùm

cundùm excessum, vel defectum, vel æqualitatem.

In omni proportione duo sunt termini, quorum is dicitur antecedens, qui primo loco sive in recto nominatur; alter consequens. Cum antecedens est major consequente, dicitur proportio majoris inæqualitatis, seu majoris ad minus. Cum antecedens est minor consequente, proportio minoris inæqualitatis, seu minoris ad majus appellatur. Cum antecedens consequenti par est, dicitur æqualitatis proportio.

9. In numeris duæ proportiones sunt æquales, eædem, similes (idem ista significant) sive quatuor numeri (A. B. C. D.) dicuntur proportionales, cùm minores utriusque proportionis termini in majoribus eodem modo continentur. Continentur autem eodem modo, si minores (B, D) sint majorum (A, C) similes partes *a* aliquotæ, vel similes partes *b* aliquantæ.

a vide def. 6. b vide def. 7.

A	8	2	B
C	16	4	D
A	14	8	B
C	28	16	D

Æquales proportiones sic efferimus, 8. est ad 2. ut 16 est ad 4.

Vel 8. habet ad 2. eamdem rationem, quam 16. ad 4.

10. Cùm plures extiterint æquales rationes, & prioris consequens fuerit antecedens posterioris (sic ut medii termini bis sumantur,) proportio continua dicitur; & numeri ipsi dicuntur continuè proportionales.

Continuas rationes sic efferimus: 1. est ad 2. ut 2. ad 4. & 4. ad 8. & 8. ad 16. &c.

1. 2. 4. 8. 16. 32.

11. Quod si unius æqualium proportionum conse-

consequens non sit antecedens alterius, ac proinde medii termini non accipiantur bis, discreta proportio erit; & numeri ipsi proportionales dicuntur, nullo alio addito.

Discretas proportiones sic efferimus. 9. est ad 3. ut 12. ad 4. 9. 3. 12. 4.

12. Cum numeri fuerint continuè proportionales (A, B, C, D, E,) ratio primi A ad tertium C duplicata dicitur rationis, quam habet primus A ad secundum B; & ratio primi A ad quartum D dicitur triplicata rationis primi A ad secundum B, & sic deinceps.

A,	B,	C,	D,	E,
1	3	9	27	81
81	27	9	3	1

De rationum denominatoribus & compositione, vide Elementa nostra Geometrica l. 5. parte 3. II, & X.

13. Numerus A multiplicare dicitur numerum B, cum B multiplicandus toties accipitur, quot sunt unitates in A multiplicante.

Vel sic: numerus A multiplicat numerum B, cùm invenitur numerus C toties continens multiplicatum B, quoties A multiplicans continet unitatem.

Verùm universaliùs multiplicatio sic definitur. Numerus A multiplicat numerum B, cum numerus reperitur C, qui ita sit ad B multiplicatum, ut A multiplicans ad unitatem.

C8 B4
A2 1

Numerus C, qui invenitur, dicitur productus, seu genitus. Porro cum multiplicans A est numerus integer, semper productus C major est multiplicato B, ut patet ex def.

4
C--B4
3
1
A--1
3

1. &

1., & 2. Cum vero multiplicans A est fractio minor unitate, productus C etiam erit minor multiplicato B, ut patet ex postrema definitione.

Plures numeri ut 2, 4, 3, per invicem multiplicari dicuntur, si 2 in 4, faciat 8, & productum 8 ducatur in 3; productum enim ultimum 24 est id, quod fit ex multiplicatione numerorum, 2, 4, 3.

Porro idem apud Arithmeticos est numerum in numerum ducere, quod numerum per numerum multiplicare. Frequens etiam ista locutio est, A per B, vel potius A in B: hoc est A ductus, seu multiplicatus per B.

14. Numerus A dicitur dividere numerum B, cum numerus invenitur C, indicans quoties A divisor in B contineatur.

Et sic divisor A est pars divisi seu dividendi B, ab invento (qui proinde quotiens dicitur) denominata.

B12	3C
A4	1

Vel universaliter: numerus A dividit numerum B, cùm alius numerus invenitur C ita se habens ad unitatem, ut divisus B ad A divisorem.

15. Numerus A metiri dicitur numerum B per X numerum aliquem (qui quotiens appellatur) cùm metiens A toties sumptus, quot in X quotiente sunt unitates, mensum adæquat.

B16	X8
A 2	1

Hæc definitio differt à præcedenti, 1. quòd divisio peragi possit, licèt divisor dividendum non metiatur. 2. licèt divisor sit major dividendo, ut suo loco tradetur. Latiùs igitur patet divisio, quàm mensio.

16. Par

16. Par numerus est, qui bifariam dividi potest. *Omnem ergo parem numerum aliquis numerus metitur per 2.*

17. Impar numerus est, qui bifariam dividi non potest, sive, qui unitate differt à pari.

18. Pariter par est, quem par per parem metitur. *Talis est 24. quem par numerus 6 metitur per parem 4.*

19. Pariter impar est, quem par metitur per imparem. *Talis est 12, quem 4 par metitur per 3. imparem.*

20. Impariter impar est, quem impar metitur per imparem. *Talis est 21, quem 7 impar metitur per imparem 3.*

21. Primus, seu incompositus numerus est, quem sola unitas metitur, *ac proinde nullas habet partes aliquotas præter unitates.*

Tales sunt, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, & alii infiniti. Porro omnis primus numerus necessariò impar est, aliàs eum metiretur binarius.

22. Compositus numerus est, quem præter unitatem, aliquis numerus ab ipso diversus metitur, *ac proinde habet partes aliquotas ab unitatibus diversas.*

Tales sunt 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, & & alii infiniti.

23. Primi inter se numeri sunt, quos nulla alia mensura communis metitur, quàm unitas.

Duo inter se primi sunt 15. & 8. quia licet singulos aliqui numeri metiantur, ac proinde neuter primus sit; tamen nullus numerus utrumque metitur. Pari modo 8. 10. 15. sunt tres primi inter se, quia nullus numerus illos tres metitur, & sic deinceps.

24 Com-

24. Compositi inter se numeri sunt, quos præter unitatem aliquis numerus, communis mensura, metitur.

Potest autem mensura communis esse unus datorum numerorum.

Duo inter se compositi sunt 8., & 10., quia utrumque metitur 2. Similiter 5., & 15. sunt duo compositi inter se, quia 5. metitur & seipsum, & 15. Tres inter se compositi sunt 3. 9. 12., quia 3. metitur 9. & 12., & se. 6. 10. 12. 16. sunt quatuor compositi inter se, quia 2. metitur omnes quatuor.

25. Planus numerus est, qui ex duorum numerorum multiplicatione producitur. Numeri autem in vicem multiplicantes plani latera dicuntur.

Omnis ergo planus est compositus.
Sic planus est 12., quia fit ex 6. per 2. item 24. quia fit ex 4. in 6.

26. Solidus numerus est, qui ex trium numerorum multiplicatione producitur. Numeri verò se mutuò multiplicantes solidi latera dicuntur.

Omnis ergo solidus est compositus.
Solidus est 24., quia fit ex multiplicatione trium numerorum 2. 3. 4., nam 2. in 3. facit 6., 6. autem in 4. facit 24.

27. Similes plani, & solidi sunt, qui proportionalia habent latera.

6. 24. sunt plani similes,	2	3	2. 4. 3.
quorum latera sunt, 2. 3., &		6	24
4. 6. est enim ut 2. ad 3., sic		24	192
4. ad 6. Solidi similes sunt	4	6	4. 8. 6.

24. 192. quia latera unius 2. 4. 3. sunt proportionalia lateribus alterius 4. 8. 6.

 28. Qua-

28. Quadratus numerus est, qui fit ex multiplicatione duorum æqualium numerorum; sive ex multiplicatione alicujus numeri per seipsum, qui radix quadrata dicitur.

Primus quadratorum est 4., qui fit ex 2. in 2. sive ex 2. in se. Secundus est 9., qui fit ex 3. in se: & sic deinceps in infinitum.

29. Cubus est, qui fit ex multiplicatione trium æqualium numerorum, sive ejusdem ter positi, qui radix cubica appellatur.

Primus cubus est 8. Fit ex multiplicatione binarii ter positi (2. 2. 2.) nam 2. in 2. facit 4., & 4. in 2. facit 8. Secundus est 27., qui fit ex multiplicatione ternarii ter positi. (3. 3. 3.) nam 3. in 3. facit 9., & 9. in 3. facit 27.

30. Perfectus numerus est, qui omnibus suis partibus aliquotis æqualis est.

Primus perfectus est 6. illius enim omnes aliquotæ partes sunt 1. 2. 3., quæ simul faciunt 6. Secundus est 28. nam illius omnes aliquotæ sunt 1. 2. 4. 7. 14, quæ simul efficiunt 28. De his vide prop. ultimam lib. 9., & scholium.

AXIOMATA.

A B
Z

1. Numeri A, B, æquè multiplices ejusdem numeri Z, sunt æquales. Et numeri, æquè multiplices æqualium numerorum, æquales sunt.

2. Æquales sunt numeri A, B, quorum æquè multiplex est idem numerus Z.

Et æquales sunt illi numeri, quorum æquè multiplices sunt æquales.

3. Æquales sunt numeri, qui sunt ejusdem nume-

numeri eadem pars, ut dimidia, vel tertia, vel quarta, &c.

Et illi numeri ſunt æquales, qui æqualium numerorum eadem pars ſunt.

4. Æquales ſunt numeri, quorum unus numerus eadem pars eſt.

Et illi numeri ſunt æquales, quorum æquales numeri eadem pars ſunt.

5. Unitas omnem numerum per unitates, quæ in ipſo ſunt, (hoc eſt per ipſum numerum) metitur.

6. Omnis numerus ſeipſum metitur per unitatem.

7. Si numerus A, multiplicans alium B, genuerit aliquem C, multiplicatus B genitum C metitur per multiplicantem A.

4A B3
C
12

Patet ex defin. 13, & 15.

8. Si numerus A numerum C metiatur, ſeu dividat per quotientem B; etiam quotiens B, multiplicans metientem A, producet menſum C: ſive metiens A per quotientem B multiplicatus, reſtituit menſum C.

Patet ex defin. 13. 15. 14.

9. Quolibet numero ſumi poteſt major.

10. Numerus A metiens quoſcumque numeros BC, CD, DE, etiam BE compoſitum ex ipſis metitur.

A—
B——C———D—E

11. Numerus A metiens quemcunque numerum B, metitur quoque omnem numerum C, quem ille B metitur.

A--2
B----4
C--------8

12. Numerus A metiens totum BC, & ablatum BD, metitur & reliquum DC.

A—
B——D—C

ADMONITIO
AD
LECTOREM.

EXpositis Definitionibus, & Axiomatis, ex quibus tota numerorum scientia deducetur, ad propositiones ipsas progredior, si prius quiddam monuero Lectores, quod interest ipsos scire. Euclides pro numeris ubique litteras alphabeti assumit optimo sanè consilio: sic enim propositionum, ac demonstrationum universalitas meliùs exprimitur. At cum numerum quempiam per alium multiplicat, A puta per B, productum tertiâ quâdam litterâ, puta C, designat. Ex quo id plerumque incommodi nascitur, ut cum plures instituì multiplicationes necesse est, memoriâ excidat, quæ producta ex quorum multiplicatione laterum genita sint, quod molestum esse solet lectoribus, & tenebras offundere. Sæpe igitur expediet productum multiplicationis eo modo exprimere, quo in logisticâ speciosâ utimur, solâ videlicet numerorum, qui se invicem multiplicant, appositione, ut si cupiam multiplicare numerum A per numerum B, productum erit AB. Primus (quod sciam) logisticam speciosam vel invenit, vel certè adhibuit Franciscus Vieta:

sed

sed Renatus Cartesius ad commodiorem formam revocavit. Præcepta hujus methodi à Francisco à Schooten conscripta, jam in lucem sunt edita per Fr. Bartholinum.

Porro operationum speciosarum prima rudimenta hæc sunt. Si cupiam numerum A addere numero B, summa erit A + B. Signum enim (+) plus significat. Si summa quæritur plurium A, B, C, ea erit A + B + C.

Si à numero A subtrahendus est numerus B, residuum erit A —— B. Signum enim (——) significat minus.

Si numerus A multiplicandus sit per numerum B, productum, ut jam dixi supra, erit AB, seù BA.

Si A per A, productum erit AA.

Si A B per B C, productum erit ABBC.

Si AA per A, productum erit AAA.

Si A + B + C per D, singulis particulis appone D, & productum erit AD + BD + CD.

Si A, B, C, D per invicem, productum erit A B C D.

Et sic in aliis. Ubi id notandum est, perinde esse, quo ordine in producto litteræ sibi mutuò apponantur. Ut si productum quæratur ex numeris A, B, C, D inter se multiplicatis, illud erit, vel A B C D, vel ACBD, vel A D B C &c. Cum enim appositio numerorum multiplicationem designet, ea verò inter plures numeros, quocunque ordine facta, idem semper productum exhibeat, (quod in scholio prop. 19. l. 8. demonstrabimus) perinde etiam erit, quo ordine sibi mutuò apponantur.

Denique si numerum A dividere oporteat

 per

per numerum B, quotiens designabitur, si infra dividendum A, lineolâ interpositâ, scribatur divisor B. $\frac{A}{B}$

Si AB per A, quotiens erit B, A quippe ductum in B restituit A B.

Si AB + AC—AD per A, quotiens erit B + C—D. Nam B + C—D ductum in A, restituit AB + AC—AD.

Hac methodo, quod quidem ad multiplicationem attinet, in demonstrandis horum trium librorum propositionibus non paucis utemur, tum videlicet cum facilitari inde demonstrationes poterunt; id quod sæpe accidet, cum plurimum referat in decursu demonstrationis producti latera ante oculos observari. Verùm hoc observandum erit, duas litteras conjunctas aliquando tantùm simplicem numerum designare, ut in tribus primis prop., & paucis aliis, quod satis ex textu ipso, & sensu verborum colligetur.

Cæterum non mihi propositum fuit hìc tradere præcepta Logisticæ speciosæ, de quâ, atque Algebrâ tum numerosâ, tum speciosa, si Deo placuerit, alio loco acturus sum; sed ea solùm attingere, quorum in his elementis, ac deinde in Arithmeticâ practicâ usus erit.

ELE-

ELEMENTORUM ARITHMETICÆ

LIBER PRIMUS.

EUCLIDI SEPTIMUS.

In citationibus librorum Euclidis numeri retinentur.

PROPOSITIO PRIMA.

SI à duobus numeris inæqualibus detrahatur semper minor de majore alternâ quâdam detractione, neque reliquus unquam metiatur præcedentem, quoad ventum sit ad unitatem; primi (a) inter se erunt dati numeri. a vide defin. 14.

A——E—G-B
C—F–D
H

Dati sint duo numeri AB, & CD; minor CD detractus ex AB, quoties potest, relinquat EB: EB verò detractus ex CD, quoties potest, relinquat FD: FD, quoties potest, detractus ex EB relinquat unitatem. Dico numeros AB, CD esse primos inter se.

Esto enim, si fieri potest, numerorum AB, CD communis mensura numerus aliquis H. Quoniam ergo H vis metiri CD, & CD metitur *b* AE, etiam H *c* metietur AE. Sed H vis metiri quoque totum AB. Ergo H metitur

b hyp.
c ax. 11.

d ax. 12. titur *d* etiam reliquum EB. Metitur autem
e hyp EB ipsum *e* CF. Ergo, & H *f* metitur CF.
f ax. 11. Quare cum H volueris metiri etiam totum
g ax. 12. CD; H quoque metietur reliquum *g* FD:
h hyp. FD autem metitur *h* EG. Ergo H quoque
i ax. 11 metitur *i* EG. Ostendi verò supra H metiri
k ax. 12. etiam totum EB. Ergo H metitur *k* etiam reliquum GB, numerus unitatem, quod est absurdum.

PROPOSITIO II.

D*Uobus numeris datis AB, DF non primis inter se, maximam eorum communem mensuram invenire.*

A————C——B Minor D F detractus
D——E—F ex majori AB, quoties
O—— potest, relinquat C B, C B detractus, quoties potest, ex DF relinquat EF, & sic deinceps.

Hâc alternâ detractione relinquetur tandem aliquis numerus, qui præcedentem metiatur: nam si ad unitatem deveniretur, dati numeri
a præced. *a* essent primi, contra hyp. Esto igitur reliquus E F, qui præcedentem C B metiatur. Dico E F esse maximam communem mensuram numerorum A B, & D F. Quod sic demonstrabitur.

b const. E F metitur *b* C B, & C B metitur *c* D E.
c const. Ergo E F etiam *d* metitur D E. Metitur verò
d ax. 11. E F etiam se. Ergo E F metietur *e* totum D
e ax. 12. F. Sed D F metitur *f* A C. Ergo E F meti-
f const. tur etiam *g* A C. Metitur autem E F etiam *h*
g ax. 11 C B. Ergo E F metitur quoque *i* totum A B.
h const. E F igitur ipsorum A B, & D F communis
i ax. 10 mensura est. Quod

Quod verò sit maxima, sic ostenditur. Esto, si fieri potest, alia O major, quàm E F. Quoniam vis O metiri D F; D F verò metitur A C, etiam O metietur *k* A C. Vis autem O etiam metiri A B. Ergo O metietur quoque *l* C B. Sed C B *m* metitur D E. Ergo O etiam metitur *n* D E. Quare cum O metiri velis etiam totum D F, metitur O quoque *o* reliquum EF, se minorem, quod est absurdum.

k ax. 11.
l ax. 12.
m const.
n ax. 11.
o ax. 12.

Corollarium.

NUumerus O, metiens duos numeros A B, D F, metitur quoque maximam eorum communem mensuram E F.

PROPOSITIO III.

TRibus numeris datis, non primis inter se, C, D, E, maximam eorum communem mensuram invenire.

C———
D——————O
E——— — P
S———

Inveniatur O maxima *a* communis mensura duorum C, D. Si O etiam metitur E, erit maxima communis mensura trium C, D, E: nam si esset aliqua S major, quam O, metiretur S etiam O per corol. præced., quod est absurdum, cum S ponatur major, quàm O.

a præced.

Quod si O non metiatur E, saltem O, & E, inter se compositi erunt. Cum enim C, D, E, *b* sint tres inter se compositi, aliqua mensura communis eos *c* metietur, ac proinde etiam *d* ipsum

b hyp.
c def. 24.
d coroll. præc.

ipsum O. Duorum igitur O, E inveni maximam communem mensuram P. Dico, P communem esse maximam trium C, D, E.

e const. *f* const. *g* ax. 11 *h* const.

Cum enim P *e* metiatur O; O verò metiatur *f* C, D: etiam P *g* metietur C, D. Metitur autem *h* P Etiam E. Ergo P est mensura trium C, D, E. Quod verò maxima sit, sic ostenditur. Sit alia S major, si fieri potest, quàm P. Quoniam ergo S metitur C, D, E, metietur *i* quoque ipsorum C, D maximam mensuram O. Quia ergo S metitur E, & O, metietur *k* rursum S eorum maximam mensuram *l* P, major minorem. Quod est absurdum.

i corol. præc. *k* idem corol. *l* const.

D-----C---E---
O---S---
P--

Corollarium.

1. EOdem artificio reperietur quatuor, imo quotvis, non primorum inter se numerorum, mensura communis maxima.

2. Numerus S, metiens quoscunque numeros E, D, C, metitur etiam eorum maximam communem mensuram P. Patet ex ultima parte demonstrationis.

PROPOSITIO IV.

ET reliquæ usque ad 15. inclusivè continentur in propositionibus universalibus libri 5. Elem. Geom.

PROPOSITIO XVI.

DUo numeri A, B, se mutuò multiplicantes, æquales numeros producunt C, D.

Quoniam A multiplicans B facit D, erit *a* unitas ad A, ut

a def. 13. l. 7.

unit. 1. A 6 B 4

A, ut B ad D. Igitur *b* permutando, ut unitas est ad B, sic A ad D. Rursus quia, B multiplicans A facit C, erit ut unitas *c* ad B, sic A ad C. Ergo A ad D, & C eamdem habet rationem. Ergo C, & D *d* æquales sunt. Quod erat demonstrandum.

C 24 D 24

b 16. l. 5.
c def. 13. l. 7.
d 9. l. 5.

Corollarium.

1. Si numerus A, multiplicans numerum B, fecerit C, multiplicans A metietur productum C per B multiplicatum. Nam quia A in B facit C, etiam B in A facit C per hanc prop. Ergo, cum A, qui prius erat multiplicans, jam sit etiam multiplicatus respectu ejusdem producti C, patet ex axio. 7. A metiri B per C.

A
B
C

2. Si A metitur seù dividit C per B, etiam B quotiens per A metietur eumdem C.

A B
C

Nam quia A per B metitur C, ergo per ax. 8. B multiplicans A faciet C. Ergo per hanc XVI. etiam A multiplicans B faciet C. Ergo per ax. 7. B per A metitur C. Quod erat propositum.

PROPOSITIO XVII.

SI numerus A, multiplicans quotcumque numeros B, C, totidem genuerit numeros AB, AC, erunt geniti AB, AC multiplicatis B, C proportionales.

Cum enim A, multiplicans B, fecerit AB,

a def. 3. l. 7. unitas AB, erit ut a unitas ad A, sic B
1 ad AB. Rursus cum A multiplicans
b ibid A C fecerit AC, erit ut b unitas ad
B. C. A, sic C ad AC. Ergo B est ad
c 11 l. 5. AB AC. AB, ut c C ad AC. Igitur permu-
d 16. l. 5. tando est B ad C, d ut AB ad AC. Quod erat demonstrandum.

Scholium.

Coepimus hic multiplicationis productum exprimere sola numerorum multiplicantium mutua appositione, de qua vide dicta ante principium hujus 7. libri. Hæc methodus cum adhibebitur, quod ingenti plerumque compendio fiet, commodius efferetur propositione 17. huncin modum.

Numeri quotcunque AB, BC, commune latus habentes B, eam inter se proportionem habent, quam latera reliqua A, & C.

Latera numeri sunt, ex quorum multiplicatione producitur. Porro, ut huic methodo, quæ, ut dixi, commodi permultum, ac compendii habet, Tirones melius assuescant, præter exemplum in prop. adductum, alia adhuc nonnulla visum est subjungere.

I. AA est ad AB, ut A ad B.
II. AB est ad BB, ut A ad B.
III. AAA est ad AAB, ut A ad B.
IV. ABB est ad BBB, ut A ad B.

In I. commune latus est A, reliqua vero sunt A secundum, & B. In II. latus commune est B, reliqua verò sunt A, & B secundum. In III. latus commune est AA, reliqua

liqua verò ſunt A tertium, & B. In IV. latus commune eſt BB, reliqua ſunt A, & B tertium.

V. AA, AB, BB. ſunt continuè proportionales in ratione A ad B. Patet ex I. & II.

VI. AAA, AAB, ABB, BBB ſunt continue proportionales in ratione A ad B. Patet ex III., & IV.

VII. AB, AC, AD, AE, AF eam inter ſe rationem habent, quam B, C, D, E, F. Patet ex ipſa propoſitione.

Quantus ſit hujus ſcholii uſus ad demonſtrationes prolixas aliàs, & difficiles facillimè expediendas, tum in his libris deinceps, tum in Arithmetica Practica, plurimis locis apparebit.

PROPOSITIO XVIII.

SI quotcunque numeri B, C, multiplicantes eumdem numerum A, totidem genuerint numeros D, F; erunt geniti D, F multiplicantibus B, C proportionales.

B 2	C 4	
	A 3	
D 6	F 12	

Nam cum B per A fecerit D.; etiam A *a* per B facit D: & cum C per A faciat F; etiam *b* A per C faciet F. Ergo *c* B eſt ad C, ut D ad F, Quod erat demonſtrandum.

a 16. l. 7.
b ibid.
c præced.

Corollarium.

NUmerus A dividens, ſeù metiens quotcunque numeros I, P, gignit quotientes R, S, numeris diviſis, ſeù menſis proportionales.

Vide Schema pag. ſeq.

Nam

Nam quoniam A ipsos I, P metitur, seù dividit per quotientes R, S; manifestum est ex 8. axio. A in R, & S ductum producere I, & P. Ergo per 17. ut I est ad P, sic R est ad S.

Aliter.

I 12		P 20	
	A 4		
R 3		S 5	
	unit.		
	S		

Cùm A metiens, seù dividens I fecerit R; erit ut *d* unitas ad R, sic A ad I. Igitur *e* permutando, ut unitas est ad A, sic R est ad I. Rursum cum A metiens P, fecerit S; erit *f* unitas ad S, ut A ad P. Ergo permutando ut unitas est ad A, sic S est ad P. Quare cum jam ostenderim, etiam R esse ad I, ut unitas est ad A, erit *g* R ad I, ut S ad P. Et permutando R ad S, ut I ad P. Quod erat demonstrandum.

d def 14.
e 16. l. 5.
f def. 4.
g 11. l. 5.

PROPOSITIO XIX.

SI quatuor numeri A, B, C, D proportionales fuerint; genitus AD ex primo A, & quarto D genito BC ex secundo B, & tertio C æqualis erit. Et è converso.

A	3	B	2
C	6	D	4
BC	12	AD	12
	AC		

I. Pars. A multiplicans C faciat AC. AC est ad AD *a*, ut C ad D. & A C est ad B C *b*, ut A ad B. Quare cum *c* A sit ad B, ut C ad D, etiam AC *d* est ad AD, ut AC est ad BC. Ergo BC, AD *e* æquales sunt. Quod erat demonstrandum.

a 18. ant. 17. l. 7.
b per eand.
c hyp.
d 11. 5.
e 9. l. 5.

Pars

Pars II. Quoniam geniti AD, BC jam ponuntur æquales; erit *f* AC ad BC, ut AC ad AD. Sed ut AC est ad BC, sic *g* A est ad B: & ut AC est ad AD, sic C est ad D. Ergo *h* A est ad B, ut C ad D. Quod erat demonstrandum.

f 7. l. 5.
g 18. 7.
h 11. 5.

Corollarium I.

SI duo numeri B, C metiantur, seù dividant eumdem numerum A, per quotientes O, P; erit ut B ad C, ita reciprocè P ad O.

A
B. C.
O. P

Nam quia B, C metiuntur, seù dividunt A per O, & P, ergo per ax. 8. tam B in O, quàm C in P faciunt A. Ergo per hanc prop. B est ad C, ut P ad O.

Corollarium II.

SI A ad B majorem rationem habeat, quàm C ad D; AD genitus ex primo A in quartum D major erit, quàm BC genitus ex secundo B in tertium C.

A	4	2	B
C	6	4	D
AD	16.	12	BC
	A	C	

Et è converso.

I. Pars. A in C faciat AC, AC ad BC eamdem proportionem habet, quàm *a* A ad B; hoc est majorem *b*, quàm C ad D; hoc est majorem *c*, quàm rursus AC ad AD. Ergo BC minor *d* est, quàm AC.

II. Pars. Quoniam AD jam ponitur major, quàm BC; erit ratio AC ad BC major ratione AC ad AD. Sed ratio AC ad BC est ratio *f* A ad B;

a schol. p. 17. l. 7.
b hyp.
c schol. p. 17.
d 10. l. 5.
e 8. l. 5.
f schol.

g idem. ad B; & ratio AC ad AD est ratio *g* C ad D. Ergo etiam ratio A ad B major est ratione C ad D.

PROPOSITIO XX.

SI tres numeri A, B, C proportionales fuerint; A C genitus ab extremis æqualis est B B quadrato medii.

Et si genitus ab extremis quadrato medii æqualis est; tres numeri proportionales erunt.

A 4		B 8	
B 8		C 16	
BB 64		AC 64	

Pars I. Ponatur medius B bis. Igitur per hypoth. A est ad B, ut B ad C. Cum ergo quatuor jam habeantur proportionales; erit *a* genitus ab extremis AC par genito ex B secundo, & B tertio, hoc est quadrato ipsius B.

a 1. par. præced.

Pars II. Eodem modo demonstrabitur ex II. parte præcedente.

PROPOSITIO XXI.

NUmeri A, & B, omnium sibi proportionalium minimi, numeros sibi proportionales C, & D æquè metiuntur.

Nam quia per hyp. A est ad B, ut C ad D; etiam permutando A est ad C, ut B ad D. Ergo A, & B ipsorum C, & D sunt *a* partes similes, vel aliquotæ, vel aliquantæ. (Esse verò A, B minores ipsis C, D, patet ex hypothesi.) Sed non sunt similes aliquantæ; quod sic ostendo.

a def. 9.

do. Si A, B ipsorum C, D sin. similes aliquantæ, ergo *b* A continet O talem aliquotam ipsius C, qualem B continet ipsius D, puta P; ac proinde *c* O est ad C, ut P est ad D; & permutando *d* O est ad P, ut C est ad D; hoc est, ut A ad B. Sed A, B continent ipsos O, P; Ergo A, B non sunt minimi suæ proportionis, quod evertit hypothesim. Igitur A, B non sunt ipsorum C, D similes aliquantæ. Reliquum est igitur, ut similes aliquotæ sint ac proinde ipsos C, D æquè metiantur. Quod erat demonstrandum. *b* def. 7. *c* def. 6. *d* 16. l. 5.

A	2	B	3
O		P	
C	6	D	9

Corollarium.

A. B. C. D. E.
O. P. Q. R. S.
F. G. H. I. K.

EOdem prorsus modo demonstrabitur numeros A, B, C, D, E, omnium sibi proportionalium minimos, quocunque extiterint numero, totidem sibi proportionales F, G, H, I, K æqualiter metiri.

PROPOSITIO XXII.

C*Ontinetur in prop. XXII. l. 5.*

PROPOSITIO XXIII.

P*Rimi a inter se numeri A, B sunt omnium sibi proportionalium minimi.* *a* def. 23.

Sint enim alii, si fieri potest, C, D minimi, & proportionales ipsis A, B. Igitur C, D

A 15	B 8
C	D
	E

b 21. l. 7. def. 15. metiuntur b ipsos A, B æquè, unit. hoc est per eumdem numerum E. Quia ergo C metitur A per E; unitas est ad E, ut C ad A: & permutando, ut unitas est ad C, sic E est ad A. Sed unitas metitur C, Ergo etiam E metitur A. Eodem modo ostendam, E metiri B. Cum Igitur E metiatur A, & B, non erunt A, B primi inter se: quod evertit hypothesim.

Corollarium.

EOdem prorsus modo demonstrabitur, si quotvis fuerint numeri A, B, C, D primi inter se, eos fore quorumlibet sibi totidem proportionalium minimos.

A B C D
F G H I
E
unitas

PROPOSITIO XXIV.

NUmeri, omnium sibi proportionalium minimi A, B sunt inter se primi.

Si non, communis mensura E metiatur A per C, & B per D. Ergo d ut A ad B, sic C ad D. Cum ergo C, D sint minores, quàm A, B, non erunt A, B minimi omnium sibi proportionalium: quod evertit hypothesim.

d cor. p. 18. l. 7.

A4 B5
E
C D

Corollarium.

A B C D
E

EOdem modo demonstrabitur, si quotcumque fuerint numeri

F G H I meri A, B, C, D quorumlibet sibi totidem proportionalium minimi, eos fore inter se primos.

PROPOSITIO XXV.

Numerus N, qui ex duobus A, B inter se primis metitur unum A, ad reliquum B, primus est.

A B
N X

Nam si N, B non sint primi inter se, utrumque metiatur X. Quoniam ergo X metitur N, & N metitur *a* A; etiam X metietur *b* A Volebas autem, X etiam metiri B. Ergo A, B non sunt inter se primi: quod repugnat hypothesi.

a hyp.
b ax. 11.

PROPOSITIO XXVI.

Si duo numeri A, B ad quempiam C primi fuerint, etiam A B ex iis genitus ad eumdem C primus erit.

A 7 B 3
C 8
A B 21
D—— F——

Si enim AB, & C non sint inter se primi, utrumque metiatur D per F. Ergo D in F facit AB. Atqui etiam *d* A in B facit AB. Ergo D est ad A, *e* ut B ad F. Jam verò, quia A, & C sunt inter se primi, & D volebas metiri ipsum C, erit *f* D ad A primus. Ergo D, & A in suâ proportione *g* sunt minimi. Ergo sibi proportionales *h* B, F æquè metiuntur; D nempe ipsum B, & A ipsum F. Quare, cum D volueris, etiam metiri ipsum C, metietur D utrumque C, ac B. Ergo C, B non sunt

c ax. 8.
d hyp.
e 19. l. 7.
f præc.
g 23. l. 7.
h 21. l. 7.

prim inter se, quod hypothesim evertit. Primus ergo erit AB ad C. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXVII.

SI duo numeri A, B fuerint inter se primi etiam A A, quadratus unius, ad reliquum B primus erit.

A 4 B 7 Ponatur A bis. Quia igitur
a hyp. AA 16 A *a* prior primus est ad B,
A 4 etiam A posterior ad B primus erit. Ergo factus ex A in
b præc. A, hoc est AA ad B etiam *b* primus est.

PROPOSITIO XXVIII.

SI duo numeri A, B ad duos numeros C, D, uterque ad utrumque, primi fuerint; etiam ex iis geniti AB, CD inter se primi erunt.

a hyp. A B Nam, quia *a* A, & B primi sunt
b 26. l. 7. AB ad C; etiam *b* AB primus erit ad
C D C. Rursum, quia A, & B primi
c hyp. CD sunt *c* ad D, etiam AB ad D primus erit. Cum igitur C, & D ad AB primi sint, etiam CD ex iis genitus ad AB
d 26. l. 7. *d* primus erit. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXIX.

SI duo numeri A, B inter se fuerint primi; etiam eorum quadrati AA, BB, cubi

AAA,

AAA, BBB, & sic deinceps, inter se primi erunt.

Quoniam A, B sunt primi inter se, etiam AA ad B *a* primus est. Et quoniam AA, ac B sunt primi inter se, etiam *b* BB ad AA primus erit. Quod erat primùm demonstrandum.

A	B
AA	BB
AAA	BBB
AAAA	BBBB

a 27. l. 7.
b per eamd.

Rursus, quoniam A, B inter se primi sunt, etiam BB ad A *c* primus erit. Ergo B, & BB ad A primi sunt. Ostensum quoque est A, & AA ad B esse primos. Ergo AAA, genitus ex A in AA, ad BBB, genitum ex B in BB, *d* primus est. Quod erat alterum.

c per eamd.
d 28. l. 7.

Denique, quia A, & AA ad B primi sunt, etiam AAA, ex iis factus, ad *e* B primus est. Eodem modo, quia B, & BB ad A primi sunt, etiam BBB ad A *f* primus erit. Quoniam igitur A, & AAA ad B, item B, ac BBB ad A primi sunt; etiam ex iis geniti AAAA, BBBB inter se *g* primi erunt. Et sic deinceps in infinitum.

e 26. l. 7.
f ibid.
g 28. l. 7.

PROPOSITIO XXX.

SI duo numeri A, B inter se primi fuerint; etiam A+B, uterque simul, ad quemlibet illorum primus erit.

Et si uterque simul A+B ad alterutrum primus fuerit; etiam qui in principio dabantur numeri A, B inter se primi erunt.

Pars I. Nam si A + B ad A non sit primus, metietur eos numerus C, qui proinde etiam *a* metietur B. Ergo A, B non sunt inter se primi, quod repugnat hypothesi.

A + B
C ——

a ax. 11.

Pars II. Si primi non sint A, B, metietur eos C, qui proinde metietur *b* etiam A + B quod hypothesim evertit.

b ax. 10.

Corollarium.

SI A + B ad A primus est, etiam A + B ad B primus erit. Nam, quia A + B ad A primus est, erunt A, B inter se primi per II. par. Tum quia jam primi inter se sunt A, B, etiam per I. partem A + B ad B primus erit.

PROPOSITIO XXXI.

OMnis primus numerus A ad omnem numerum B, quem non metitur, primus est.

Nam si A, B non sint primi inter se, metietur eos aliquis numerus C diversus ab A, cum A, per hypothesim, non metiatur B. Ergo C non est *a* primus.

A B
C

a def. 21.

PROPOSITIO XXXII.

a def. 25.

SI planum a numerum AB aliquis primus C metiatur; is etiam è plani lateribus A, B alterutrum metietur.

Pla-

A B AB C D——

Planum AB metiatur primus C per D; si jam C non metiatur A, erunt C, A *b* primi inter se; ideoque in suâ proportione *c* minimi. Quia autem C metitur AB per D, ergo C in D *d* facit AB. Sed etiam A in B facit AB. Ergo C est ad A, ut *e* B ad D. Quare, *f* cum C, A sint in sua proportione minimi, C metietur B. Eodem discursu probabitur, C metiri A, si non metiatur B. Liquet ergo propositum.

b præc.
c 23. l. 7.
d ax. 8
e 19. l. 7.
f 23. l. 7.
g 2. l. 7.

PROPOSITIO XXXIII.

Omnem compositum numerum aliquis primus metitur.

F N——P——

Compositus quicumque esto F. Eum igitur *a* metiuntur unus, vel plures numeri, quorum minimus sit N. Dico N primum esse. Si enim primus non est, eum metietur aliquis P, qui proinde, licet minor sit, quàm N, metietur *b* etiam F. Quod est absurdum, cum N ponatur minimus omnium, qui F metiuntur.

a def. 22.
b ax. 11.

PROPOSITIO XXXIV.

Omnis numerus, aut primus est, aut ab aliquo primo mensuratur.

Patet ex præcedenti.

PROPOSITIO XXXV.

NUmeris datis quotcumque A, B, C, minimos ipsis proportionales invenire.

A	B	C
	O—	
D	E	F
P	Q	R
	X—	

a 3. l. 7. Inveniatur a O maxima mensura communis datorum A, B, C, quæ eos metiens, seu dividens, faciat D, E, F. Dico hos datis A, B, C esse proportionales minimos. Si mensurâ communi careant, erunt ipsi inter se primi per 1. Lib. VII. adeoq; minimi in suâ proportione per XXIII. Esse proportionales D, E, F, patet ex Corol. p. XVIII. Minimos esse, sic ostendo. Sint, si fieri potest, alii P, Q, R Minimi proportionales ipsis A, B, C, Ergo P, Q, R metiuntur b A, B, C per eumdem numerum, ut per X. Ergo P in X facit c A. Sed etiam D in O facit d A. Ergo e ut P est ad D, sic O est ad X. Sed P volebas esse minorem, quàm D. Ergo etiam O minor est, quàm X. Jam quia P, Q, R metiuntur A, B, C per X, patet, X in P, Q, R f producere A, B, C, ac proinde X metiri g A, B, C per P, Q, R. Ergo O non est ipsorum A, B, C maxima communis mensura, quod evertit hypothesim.

b 21. & coroll. l. 7.
c ax. 8.
d conft. & ax. 8.
e 19. l. 7.
f ax. 8.
g ax. 7.

Corollarium.

MAxima mensura quotlibet numerorum ipsos metitur per minimos omnium ipsis proportionalium.

PRO-

PROPOSITIO XXXVI.

D*Uobus numeris datis A, B, reperire minimum numerum, quem metiuntur.*

A	B
AB	
O	
N	P

Si dati A, B sunt inter se primi, ab iis genitus AB, est quæsitus. Nam, quia A in B facit AB, A metietur *a* AB. Et quia B in A facit etiam *b* AB, B metietur AB. Ambo igitur A, & B metiuntur AB. Quod verò minimus sit AB, quem A, & B metiuntur, sic ostendo. Esto, si fieri potest, O minor, metianturque A, & B ipsum O per N, & P. Quare *c* A est ad B, ut P ad N. Quia autem A, B sunt *d* primi, erunt minimi in suâ *e* proportione; ac proinde A metitur P, *f* & B metitur N. Jam quia A in B facit AB, & idem A in N facit O, ut ostensum supra, erit, ut *g* B ad N, sic AB ad O. Sed jam ostendi B metiri N. Ergo etiam AB metietur O se minorem: quod est absurdum.

a ax. 7.
b 16. l. 7.
c cor. p. 19 l. 7.
d hyp.
e 23. l. 7.
f 21. l. 7.
g 19. l. 7.

A		B
C		D
AD	vel	BC
	O	
N		P.

Si dati A, & B non sunt primi inter se, inveni C, D minimos *h* ipsis proportionales. Tum A in D faciat AD, & B in C gignat BC. Dico AD, seu BC (æquales *i* enim sunt) esse minimum, quem A, B metiuntur. Nam si velis A, & B metiri O minorem aliquem, quàm AD; eodem discursu, quo supra, ostendam AD metiri O se minorem.

h præced.
i 19. l. 7.

PRO-

PROPOSITIO XXXVII.

SI duo numeri A, & B metiantur aliquem numerum CO; etiam F minimus, quem illi A, & B metiuntur, eumdem CO metietur.

A B
C——D——O
F

Nam si F non metitur CO, O ablatus ex C, quoties potest, relinquat D O se minorem. Quoniam
a hyp. a verò, tam A, quàm B metiuntur F, F verò
b ax. 11. metitur CD; etiam b A, & B metientur
c hyp. ipsum C D. Atqui A, B metiuntur c etiam to-
d ax. 12. tum CO. Ergo metientur, & reliquum d DO minorem, quàm F, quod evertit hypothesim.

PROPOSITIO XXXVIII.

DAtis tribus numeris A, B, C; invenire minimum numerum, quem metiuntur.

a 16. l. 7. A B C
P
R
X

Inveni a minimum P, quem A, & B metiuntur. Si tertius C etiam metiatur P, erit P minimus, quem metiuntur A, B, C. Sit enim, si fieri potest, alius minor R, quem A, B, C metiantur. Ergo P non est minimus, quem metiuntur A, B, quod est contra hypothesim.

b per eamd. Quod si C non metiatur P, inveni b R minimum, quem P, & C metiuntur, & erit R minimus, quem metiuntur A, B, C. Nam, quia

A, B

A, B metiuntur P, & P metitur R; etiam A, & B metientur *c* R. Metitur autem & C ipsum R. Tres igitur A, B, C metiuntur R. Quod verò R etiam minimus sit, sic ostenditur. Esto, si fieri potest, X minor, quàm R, quem A, B, C metiantur. Ergo P, minimus, quem metiuntur A, B, metietur etiam *d* X. Ergo cum C, P metiantur X (C ex hyp., & P ex jam demonstratis) minorem quàm R, non erit R minimus, quem C, P metiuntur. Quod est absurdum contra constructionem.

c praec.

d per eamd.

Corollarium.

I. EOdem artificio datis quotcunque numeris, invenietur minimus, quem illi metiuntur.

II. Si tres numeri A, B, C, imo quotlibet, aliquem numerum X metiantur, etiam R minimus, quem A, B, C metiuntur, metietur X.

Constructis enim iisdem, quæ supra, cum A, B *e* metiantur R, etiam P *f* metietur X. Et cum C, P metiantur X (C ex hypothesi, & R ex jam demonstratis) etiam R metietur X. Quod erat demonstrandum.

e hyp.

f 27. l. 7.

PROPOSITIO XXXIX.

SI numerus A numerum B metiatur per quotientem C; quotiens erit pars mensi B, à metiente A denominata.

Nam

Nam cum A metiatur B per C, etiam C metietur B per A, hoc est C toties acceptus, quot sunt unitates in A, faciet B; ac proinde C est pars ipsius B ab A denominata.

a ax. 9.

A 3 B 24
C 4

PROPOSITIO XL.

SI numerus A partem habuerit quamlibet B; metietur illum numerus E partem denominans.

Quoniam B est pars numeri A, denominata ab E, ergo B metitur A per E. Ergo vicissim E metitur *a* A per B.

a ax. 9.

A 24 B 6
E 4

PROPOSITIO XLI.

NUmerum reperire minimum, qui partes habeat, à datis numeris A, B, C denominatas.

b 38. 7. Inveniatur *b* minimus G, quem partium denominatores dati A, B, C metiantur. Ajo, G eum esse, qui quæritur.

A2 B3 C4
G 12
P6 Q4 R3
X

Metiantur enim A, B, C ipsum G per quotientes P, Q, R. Igitur P, Q, R erunt
c 39. 7. *c* partes ipsius G ab A, B, C denominantæ. Quod autem G minimus sit, manifestum est. Si enim X minor, quàm G, haberet partes à numeris A, B, C denominatas; A, B, C
d præc. *d* metirentur ipsum X: adeoque G non esset mini-

minimus, quem metirentur: contra hypothesim.

Corollarium.

MInimus numerus, quem dati quotcunque numeri A, B, C metiuntur, est etiam minimus omnium, habentium partes, à datis numeris denominatas.

ELE-

ELEMENTORUM ARITHMETICÆ

LIBER SECUNDUS.

EUCLIDI OCTAVUS.

PROPOSITIO PRIMA.

SI fuerint quotcumque numeri proportionales A, B, C, D, quorum extremi A, D sint primi inter se; erunt A, B, C, D omnium sibi proportionalium minimi.

A B C D
E F G H

Sint enim, si fieri potest, alii E, F, G, H, minores, & proportionales ipsis A, B,
a 22.5. C, D. Igitur ex æquo *a* erit A ad D, ut E ad H. Et quia A, & D sunt inter se primi,
b 23.7. erunt sibi proportionalium minimi; ac proin-
c 21.7. de metientur *c* ipsos E, H se minores, quod est absurdum.

Apud Euclidem numeri A, B, C, D ponuntur continuè proportionales, quod non requiri, patet ex demonstratione.

PROPOSITIO II.

NUmeros, quot placuerit, in ratione datâ A ad B, continuè proportionales minimos reperire.

Sint

Un.			
A 2	B 3		
AA	AB	BB	
4	6	9	
AAA	AAB	ABB	BBB
8	12	18	27

Sint A, B minimi termini rationis datæ. A in A faciat AA, A in B faciat AB, B in B, faciat BB. Erunt AA, AB, BB tres minimi in ratione A ad B.

Quod enim proportionales sint in ratione A ad B, patet ex XVII. lib. VII. ejusq; Scholio. Quod minimi, sic ostendo. Quia A, B sunt *a* minimi in suâ proportione, erunt inter se *b* primi. Quare etiam eorum quadrati AA, & BB inter se *c* primi erunt. Ergo AA, AB, BB, sunt tres *d* minimi sibi proportionalium, hoc est in ratione A ad B.

a h vp. *b* 24. l. 7. *c* 29. l. 7. *d* præc.

Multiplicans deinde A tres jam inventos, faciat AAA, AAB, ABB: tum B multiplicans tertium BB, faciat BBB: erunt hi quatuor in ratione A ad B proportionales minimi. Quod sint proportionales in ratione A ad B patet ex XVII. lib. VII. ejusque Scholio. Quod minimi, patet ex XXIX. lib. VII., & ex præcedentibus.

Nam AAA, BBB sunt *e* primi inter se; ac proinde AAA, AAB, ABB, BBB sunt quatuor *f* minimi in sua proportione, quæ est A ad B.

e 29. l. 7. *f* præc.

Eodem artificio invenientur minimi quatuor, quinque, & deinceps plures in infinitum.

Corollarium.

I. Trium minimorum numerorum AA, AB continuè proportionalium, extremi sunt qua-

quadrati, si quatuor fuerint, extremi erunt cubi, & sic deinceps.

II. Numerorum minimorum continuè proportionalium, jam inventorum, extremi sunt primi inter se, patet ex eorum genesi, & ex XXIX. lib. VII.

III. Duo rationis datæ minimi A, B metiuntur omnes reliquos infinitos. Cum enim reliquos omnes gignant A, & B, eos quoque metientur, per ax. 7, & corol. prop. XVI. lib. VII.

IV. Unitas, A, AA, AAA, sunt continuè proportionales: similiter & unitas, B, BB, BBB. Nam, cum A, multiplicans A, faciat AA; erit, ut *g* unitas ad A, sic A ad AA. Et cum A, multiplicans AA, faciat AAA; erit *h*, ut unitas ad A, hoc est, ut A ad AA ad AAA. Ergo &c.

g def. 13.

h per eamd.

5. Inter extremos AAA, & BBB cadunt æquè multi medii, atque inter ipsos, & unitatem: patet ex demonstratis.

PROPOSITIO III.

SI fuerint quotcunque continuè proportionales A, B, C, D minimi eamdem cum ipsis rationem habentium; extremi A, D inter se primi erunt.

a 35. 7.

Inveniantur *a* duo E, F minimi in ratione A ad B. Tum per præced. inveniantur O, P, Q, R totidem minimi in ratione E ad F. Quoniam igitur tam O, P, Q, R, quam A, B, C, D, sunt minimi

A	B	C	D
	E	F	
O	P	Q	R

mi in ratione E ad F, & æquè multi; eosdem utrinque numeros illos esse necesse est. Sed extremi O, R sunt inter se [b] primi. Ergo etiam A, D inter se primi erunt. Quod erat demonstrandum. b Cor. 2. præc.

Porro seriem proportionalium continuè numerorum minimorum, quorum proinde extremi sunt inter se primi, non posse ulterius continuari, demonstrabitur. prop. XVII. lib. IX.

PROPOSITIO IV.

DAtis quotcunque rationibus in numeris minimis; easdem in minimis etiam numeris continuare.

A ad B.		C ad D			
N	O	P			
Q	R	S			

1. Dentur in minimis terminis rationes duæ A ad B, & C ad D. Inveni O minimum, quem metiuntur B, & C. Tum quoties B metitur O, toties A metiatur numerum N, & quoties C metitur O, toties D metiatur P. Dico N, O, P esse minimos, qui continuant rationes datas A ad B, & C ad D. Quod enim continuent rationes datas, patet ex ipsâ eorum genesi, vi cujus, ut A est ad N, sic B est ad O; & ut C est ad O, sic D ad P. Quare permutando, ut A ad B, sic N ad O: & ut C ad D, sic O ad P. Quod minimi sint, sic ostendo. Minores enim, si fieri potest, Q, R, S continuent rationes datas. Quoniam igitur, ut A est ad B, sic Q ad R, suntque A, B in ratione suâ minimi, liquet *d* A, B metiri ipsos Q, R. Eandem ob causam C, D metientur R, S. Quoniam ergo c 36. 7. d 21. 7.

ambo B, C metiuntur R, etiam O minimus,
e 37.7. quem metiuntur B, C, ipsum R metietur, major minorem. Quod est absurdum.

2. Dentur in minimis terminis rationes tres A ad B, C ad D, E ad F.	A ad B.	C ad D.	E. ad F.
	N	O P	Q
	R	S T	V

Inveni O minimum, quem metiuntur B, & C; & quoties B, C metiuntur O, toties A, D metiantur numeros N, P. Tum si E metitur P, fiat, ut toties F metiatur Q. Dico N, O, P, Q, esse minimos, qui tres rationes datas continuant.

Quod enim N sit ad O, ut A ad B, & O ad P, ut C ad D, & P ad Q, ut E ad F, ex ipsâ constructione patet. Quod minimi sint, sic ostendo. Continuent minores alii R, S, T, V, si fieri potest, rationes datas. Ostendam, ut supra, majorem O metiri minorem S. Quod est absurdum.

Si verò E non metiatur P, inveniatur S minimus, quem P, & E metiuntur, & quo-	A ad B.	C ad D.	E ad F.	
	N	O	P	
	Q	R	S	T
	V__	X__	Y__	Z__

ties P metitur S, toties O, N metiantur numeros R, Q, item quoties E metitur S, toties F metiatur T. Dico, Q, R, S, T esse minimos, qui tres rationes datas continuant.

Nam ex constructione patet, S esse ad T, ut E ad F; item Q, R, S proportionales esse ipsis N, O, P. Sed N, O, P continuant, ut ostensum supra, rationes A ad B, & C ad D. Ergo etiam Q, R, S easdem continuant, ac proinde, cum etiam sit, ut E ad F, sic S ad T;

pate,t

patet, Q, R, S, T continuare tres rationes A ad B, C ad D, E ad F. Quod autem Q, R, S, T minimi sint, sic ostendo. Continuent, si fieri potest, tres rationes datas minores alii V, X, Y, Z. Quoniam igitur A est ad B, ut V ad X, suntque A, B minimi *f* in ratione suâ; B *g* metietur X. Eodem modo ostendam, etiam C metiri X. Ergo *h* etiam O minimus, quem metiuntur B, ac C, metietur ipsum X. Jam quia ponitur, X esse ad Y, ut C est ad D, hoc est, ut O ad P, etiam permutando X erit ad O, ut Y ad P. Cum ergo O metiatur X, etiam P metietur Y. Sed etiam E metietur Y, (cum E, F sint in ratione *i* suâ minimi, & velis, ut E ad F, sic Y esse ad Z.) Ergo etiam S minimus, quem E, & P metiuntur, metietur Y, minor majorem. Quod est absurdum.

f hyp.
g 21.7.
h 37.7.
i hyp

Eodem artificio in minimis terminis continuabuntur rationes quatuor, & plures deinceps in infinitum.

PROPOSITIO V.

Plani numeri AB, CD rationem inter se habent compositam ex laterum rationibus.

Nimirum ex rationibus A ad C, & B ad D; vel rationibus A ad D, & B ad C.

B, multiplicans C, faciat BC. Ratio AB ad CD composita est ex rationibus AB ad BC, & BC ad CD, ut demonstravi in Elem. Geom. l. V. par. III. n. 12. Sed ratio AB ad BC est *a* eadem cum ratione A ad C, & ratio BC ad CD eadem *b* est cum ratione B ad D. Ergo etiam ratio AB ad CD composita est ex rationibus laterum

AB CD
BC

a 17.7.
b ibid.

D 2 terum

terum A ad C, & B ad D. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO VI.

SI numerorum continuè proportionalium A, B, C, D, E primus A ſecundum B non metiatur; neque ullus ullum metietur.

A B C D E

Quod nullus metiatur proximè inſequentem, patet ex ipſa hypotheſi. Quod vero nec ullus ullum metiatur, ſic oſtendo. Tribus
a 35.7. A, B, C inveniantur *a* proportionales minimi N, O, P. Erunt ergo N, P
b 22.5 primi inter ſe, eritque ex *b* æquo, ut A ad C, ſic N ad P. Quia vero A eſt ad B, ut N
c def. 22. ad O, & A non metitur B, neque N metietur O: ac proinde N non eſt unitas. Quare cum N, P ſint primi inter ſe, N non *c* metietur P. Atqui A eſt ad C, ut N ad P. Ergo neque A metitur C. Eodem modo oſtendam, neque B metiri tertium à ſe numerum D, neque C à ſe tertium E. Et ſi quatuor ſumantur minimi proportionales datis A, B, C, D, ſimili viâ demonſtrabitur, neque A metiri quartum D, neque B à ſe quartum E, & ſic deinceps.

A B C D E
N O P

PROPOSITIO VII.

SI numerorum continuè proportionalium A, B, C, D, E, aliquis quempiam alium à ſecundo B metiatur, etiam primus A ſecundum B metietur.

Nam

Nam si A non metiatur B, neque ullus ullum ex sequentibus *c* metietur, quod evertit *c* præc. præc. hypothesim.

PROPOSITIO VIII.

SI quatuor numeri in eâdem fuerint proportione, ut A ad B, sic C ad D; quot inter duos primos A, & B, existunt proportionales medii, totidem inter posteriores duos C, & D existent.

A P Q B
N O R S
C V X D

Inter A, B cadant medii P, Q. Numeris A, P, Q, B inveni *a* proportionales minimos N, O, R, S. Igitur ex æquo *b* erit ut N ad S, sic A ad B, hoc est C ad D. Sunt autem N, S *c* primi inter se, ac proinde in suâ *d* proportione minimi. Ergo N, S æquè metiuntur *e* sibi proportionales C, D. Toties O, & R metiantur alios V, X. Quoniam igitur N, O, R, S æquè metiuntur ipsos C, V, X, D, patet C, V, X, D, esse proportionales ipsis N, O, R, S, hoc est datis *f* A, P, Q, B. Quare cum A, P, Q, B sint *g* continuè proportionales, etiam C, V, X, D totidem continuè proportionales erunt: ac proinde inter A, B, & inter C, D æquè multi existunt medii proportionales: quod erat demonstrandum.

a 35.7.
b 22.5.
c 3.8.
d 22.7.
e 21.7.
f hyp.
g hyp.

PROPOSITIO IX.

SI duo numeri C, & D primi inter se fuerint, quot inter ipsos existunt medii proportionales,

 nales,

nales, totidem & inter eorum singulos, ac unitatem existent.

C O P D
1.
Unitas
A B
AA AB BB
AAA AAB ABB BBB

Inter C, ac D existant medii proportionales O, P. Inveni *a* duos A, B minimos in ratione C ad D; deinde tres AA, AB, BB, demum quatuor AAA, AAB, ABB, BBB, donec inventorum multitudo par sit multitudini datorum C, O, P, D. Quoniam ergo extremi C, D sunt *b* primi inter se, erunt C, O, P, D *c* minimi sibi proportionalium, hoc est minimi in *d* ratione A ad B. Quare cum AAA, AAB, ABB, BBB sint etiam *e* minimi in ratione A ad B, erunt hi illis æquales, singuli singulis. Deinde ex prop. II. hujus, & definit. 13. patet, unitatem, A, AA, AAA, itemque unitatem, B, BB, BBB esse continuè proportionales. Quare cum tam multitudo AAA, AA, A, quàm BBB, BB, B cum unitate par sit multitudini AAA, AAB, ABB, BBB, hoc est C, O, P, D, quot medii cadent inter C, & D, totidem cadent inter unitatem, & AAA, sive C, itemque inter unitatem, & BBB, sive D. Quod erat demonstrandum.

C O P D
1.
Unitas
A B
AA AB BB
AAA AAB ABB BBB

a 2. 8.
b hyp.
c 23. 7.
d hyp.
e ex const.

PRO-

PROPOSITIO X.

SI inter unitatem, & duos numeros AAA, ac BBB æquè multi medii proportionales existant; etiam inter ipsos AAA, & BBB æquè multi existent medii.

Instituatur tota constructio propositionis II. hujus, eritque manifesta demonstratio ex corollario 4., & 5. propositionis ejusdem.

Corollaria.

I. Si fuerint duo ordines ab unitate continuè proportionalium 1, A, AA, AAA, &c. B, BB, BBB, &c.; erit ratio AA ad BB duplicata rationis A ad B, & ratio AAA ad BBB triplicata rationis A ad B, & sic deinceps.

Unit.
1.
A B
AA AB BB
AAA AAB ABB BBB

Nam AA, AB, BB sunt continuè *a* propor- *a* schol.
tionales in ratione A ad B. Ergo ratio AA ad p.7.7.
BB est duplicata *b* rationis AA ad AB, hoc est *b* def.12.
A ad B. Similiter cum AAA, AAB, ABB,
BBB sint continuè *c* proportionales in ratione *c* schol.
A ad B; erit ratio AAA ad BBB triplicata *d* 17.7.
rationis AAA ad AAB, hoc est rationis A ad *d* def.22.
B. Et sic deinceps. Quod erat demonstrandum.

II. Verum est corollarium primum, a quocunque communi numero C inchoentur series.

 Cum

	A		
	B		E
C	O		F
D	P	Q	G

Cum enim ſint in proportione continuâ A, B, C, item A, E, F; erit C A *a* par BB, & FA par EE. Sed ratio BB ad EE eſt duplicata rationis B ad E, per XI, quæ ab hac non dependet. Ergo etiam ratio CA ad FA, hoc eſt ratio *b* C ad F, duplicata eſt rationis B ad E: quod erat primum. Pari modo oſtendam, quod ratio DB ad GE ſit duplicata rationis C ad F, ac proinde quadruplicata rationis B ad E: Sed ratio DB ad GE, componitur ex rationibus D ad G, & B ad E. Ergo ratio D ad G cum ratione B ad E eſt quadruplicata rationis B ad E. Ergo ſola ratio D ad G eſt triplicata rationis B ad E: quod erat alterum.

a 20. 7.

b ſchol. p. 17. 7.

III. Si inter numerum A, & duos D, G æquè multi cadant medii proportionales B, C, E, F; etiam inter ipſos D, C, licet alteruter ſit unitas, æquè multi medii cadent.

Patet ex coroll. II. Cum enim ratio D ad G ſit triplicata rationis B ad E; inter D, & G cadent duo *c* medii proportionales in ratione B ad E.

c def. 12.

PROPOSITIO XI.

INter duos quadratos numeros AA, BB unus cadit medius proportionalis AB, & proportio quadrati numeri AA ad quadratum numerum BB duplicata eſt proportionis laterum A, B.

AA	AB	BB
A		B

a def. 12. Pars I. AA eſt ad AB *a*, ut A ad B; & AB eſt ad

BB,

BB, ut A ad B. Ergo *b* AA est ad AB, ut AB ad BB. Quod erat primum. 11. 5.

Pars II. Patet ex 1. parte, rationem AA ad BB esse duplicatam *c* rationis AA ad AB, hoc est *d* rationis A ad B. *c* def. 12. *d* schol. 17. 7.

Scholium.

EX *hac, & VIII. præcedente demonstrari potest theorema illud celeberrimum, quod Euclidi est libri X. postremum*: In quadrato diameter lateri incommensurabilis est.

Si enim id negatur, erit diameter ad latus, ut numerus ad numerum, puta ut a *ad* b, *ut patet ex definitione commensurabilium. Ergo etiam, ut patet ex 22. l. VI. quadratum diametri est ad quadratum lateris, ut quadratus numerus* aa *ad quadratum numerum* bb, *quod fieri non potest. Cum enim, ut patet ex 47. l. I., quadratum diametri sit ad quadratum lateris, ut 2. ad 1, si illud ad hoc esset, ut quadratus numerus* aa *ad quadratum numerum* bb, *etiam* aa *esset ad* bb, *ut 2 ad 1: ac proinde cum inter* aa, *&* bb *per hanc propositionem cadat unus medius integer, etiam inter 2, & 1 caderet medius integer unus, per VIII. Quod est absurdum.* a. b. aa. bb.

PROPOSITIO XII.

I*Nter duos cubos numeros AAA, & BBB, duo cadunt medii proportinales AAB, ABB; & cubi AAA ad cubum BBB proportio est triplicata proportionis laterum A, B.*

AAA

AAA	AAB	ABB	BBB	Per scholium
	A	B		prop. XVII. lib.

VII. AAA, AAB, ABB, BBB sunt continuè proportionales in ratione A ad B, quod erat primum: ex quo, & definitione 12. patet etiam secundum.

PROPOSITIO XIII.

Dentur numeri continuè proportionales quotcunque A, B, C, qui in seipsos ducti faciant AA, BB, CC, & in hoc rursum ducti faciant AAA, BBB, CCC, atque ita deinceps in infinitum.

Erunt AA, BB, CC, item AAA, BBB, CCC, & sic deinceps continuè proportionales.

1.	1.	1.
A	B	C
AA	BB	CC
AAA	BBB	CCC

Per corol. 4. prop. II. hujus; tres series, hic ab unitate incipientes, sunt continuè proportionales. Ergo ratio AA ad BB *a* est duplicata rationis A ad B, hoc est *b* rationis B ad C. Sed etiam ratio BB ad CC duplicata *c* est rationis B ad C. Ergo *d* AA est ad BB, ut BB ad CC. Similiter, quia ratio AAA ad BBB est triplicata *e* rationis A ad B, hoc est *f* B ad C, cujus etiam triplicata *g* est ratio BBB ad CCC: erit quoque *h* AAA ad BBB, ut BBB ad CCC. Quod erat demonstrandum.

a coroll. p. 10 8.
b hyp.
c coroll. p. 10. 8.
d 34 5.
e coroll. p. 10. 7.
f hyp.
g coroll. p 10. 7.
h 34. 5.

PRO-

PROPOSITIO XIV.

SI quadratus numerus AA quadratum numerum BB metiatur, etiam A latus unius metietur B latus alterius.

Et si latus A metiatur latus B, etiam quadratus AA quadratum BB metietur.

AA AB BB
A B

Pars I. A in B faciat AB. Per schol. p XVII. lib. VII. AA, AB, BB sunt proportionales in ratione A ad B. Quare cum *a* AA metiatur BB, etiam *b* AA metietur AB. Sed ut AA est ad AB, *c* sic A est ad B. Ergo etiam *d* A metitur B: quod erat primum.

a hyp.
b 7. 81.
c schol. p. 17. l. 7.
d ax. 11.

Pars II. Ut A est ad B, sic *e* AA est ad AB. Sed A jam ponitur metiri B. Ergo etiam AA metitur AB. Rursum, quia, ut A ad B, *f* sic AB est ad BB, metiturque *g* A ipsum B, etiam AB metietur *h* BB. Ergo AA metietur quoque BB. Quod erat alterum.

e schol. p. 17. 7.
f ibid.
g hyp.
h ax. 11.

PROPOSITIO XV.

SI cubus numerus AAA cubum numerum BBB metiatur, etiam latus A metietur latus B, Et è converso.

AAA AAB ABB BBB
A B

Pars I. Inter utrumque cubum interpone numeros AAB, ABB, quorum genesim litteræ satis indicant. Erunt omnes quatuor *a* continuè proportionales in ratione A ad B. Quare cum AAA

a schol. 17. 7.

b hyp. AAA metiatur BBB, *b* etiam AAA *c* metitur
c 7. 8. AAB. Sed AAA est ad AAB, *d* ut A ad B.
d schol. Ergo etiam A metitur B: quod erat primum.
17. 7. Pars II. Quia AAA est ad AAB, ut *e* A ad
e ibid. B, poniturque jam A metiri B, etiam AAA metietur AAB. Pari modo quia AAB, ABB, BBB sunt *f* inter se, ut A ad B, etiam AAB metietur ABB, & ABB ipsum BBB. Ergo etiam *g* AAA metitur BBB: quod erat alterum.

f ibid.

g ax. 1.

PROPOSITIO XVI.

Si quadratus AA quadratum BB non metiatur, neque latus A metietur latus B. Et è converso.

Pars I. Nam si latus A tunc metiatur latus B, etiam AA *a* metiretur BB, contra hypothesim.

AA	BB
A	B

a 2. par. p. 13. 8.

Pars II. Si latere A non metiente B, metiatur AA ipsum BB, sequeretur etiam *b* A metiri B, contra hypothesim.

b 1. par. ejusd.

PROPOSITIO XVII.

Si cubus AAA cubum DDD non metiatur, neque latus A metietur latus D. Et è converso.

Demonstratur ab absurdo per XV.

Demon-

PROPOSITIO XVIII.

INter duos planos ſimiles AB, CD unus medius proportionalis eſt numerus: & plani ad planum ratio duplicata eſt rationis homologorum laterum A, C.

AB	BC	CD
A	B	C D

Pars I. Quoniam AB, CD ſimiles plani ſunt, erit latus *a* A ad latus B, ut latus C ad latus D; & permutando A ad C *b*, ut B ad D. Cum igitur AB ſit ad BC, *c* ut A ad C, hoc eſt, quod jam oſtendi, ut B ad D, hoc eſt, *d* ut BC ad CD, erit BC medius proportionalis inter AB, CD: quod erat primum.

a def. 27.
b 16 5.
c ſchol. p. 17. 7.
d ibid.

Pars II. Per I. partem ratio AB ad CD eſt duplicata *e* rationis AB ad BC, hoc eſt *f* rationis A ad C: quod erat alterum.

e defin.
f ſchol. p. 17. 7.

PROPOSITIO XIX.

INter duos ſimiles ſolidos ABC, DEF duo cadunt medii proportionales BCD, CDE: & ratio ſolidi ad ſolidum eſt triplicata rationis laterum homologorum A, & D.

ABC	BCD	CDE	DEF
A	B	C	D E F

Pars I. Quia ſimiles ſolidi ſunt ABC, & DEF, erunt unius latera A, B, C proportionalia alterius lateribus D, E, F. Quare permutando A eſt ad D, ut B ad E, & C ad F. Jam per ſcholium prop. XVI. lib. VII. eſt

ABC

ABC ad BCD, ut A ad D	BCD ad CDE, ut B ad E	CDE ad DEF, ut C ad F

Sed jam ostendi A esse ad D, ut B est ad E, & ut C est ad F. Ergo etiam ABC est ad BCD, ut BCD ad CDE, & CDE ad DEF, ac proinde BCD, CDE sunt duo medii proportionales inter ABC, & DEF. *Q. F. D.*

Pars II. Jam patet ex I. parte, & definitione XII, rationem ABC ad DEF esse triplicatam rationis ABC ad BCD, hoc est *a* rationis A ad D. *Q. E. D.*

a schol.p. 17.7.

Scholium.

Videtur hic locus exigere, quando solidus numerus ex trium numerorum multiplicatione producitur, ut demonstremus ex tribus, imo quotlibet numeris, quocumque inter se ordine multiplicatis, eumdem semper numerum produci. Insigne theorema est, & usus permagni, quod aliâ quâdam via, longèque expeditiori, quàm alii passim soleant, demonstrabimus. Sed quoniam ea pendet a permutationibus, quas datus rerum numerus subire potest, sit.

Theorema I,

Datæ sint res, seù litteræ quotcumque A, B, C, D, E, & ponantur totidem numeri ab unitate 1, 2, 3, 4, 5. Hi inter se ordinatim multiplicati producent numerum permutationum, quas res datæ A, B, C, D, E subire possunt.

Theore-

Theorematis hujus demonstrationem, me audisse memini R. P. Ignatium Derkennis pulcherrimè deducentem ex simplici duarum unitatum permutatione. Illius, dum hæc scribo, in lucem prodit opus Theologicum de Deo uno, trino Creatore conscriptum methodo planè eximiâ, longissimèque diversâ ab eâ, quam de simili scribentes argumento hactenus tenuerunt. In quo istud etiam Lector clarè perspiciet, non solum Theologiæ Philosophiam ubique ancillari, sed, quod non perinde fortassis sibi homines persuaserint, etiam è Mathematicis ratiociniis, quantum subinde ad sublimes de Deo, divinisque rebus quæstiones enodandas possit lucis affundi. Ita porro, quod supra reposui, deducebat.

Duæ litteræ (has enim pro rebus assumemus) a, b *possunt bis permutari quâlibet semel ultimum locum, vel primum occupante. Hinc,*

Tres litteræ a, b, c *permutari possunt sexies: nam quâlibet trium semel occupante ultimum locum, possunt duæ reliquæ bis permutari. Cum enim* c *tenet ultimum locum, possunt duæ reliquæ* a, b *bis permutari, ac proinde duo habentur diversi ordines* a b c, b a c. *Rursus* b *occupante ultimum locum, bis permutari possunt reliquæ* a, c, *& sic duo novi exsurgunt ordines* a c b, c a b. *Denique* a *ultimum tenente locum, reliquæ* b, c *bis permutari possunt: unde rursus duo alii existunt ordines* b c a, c b a. *En simul omnes.*

abc acb bca

bac cab cba.

Quatuor litteræ, a, b, c, d, *permutationes admittunt 24. Nam quælibet ex 4 datis litteris semel occupare potest locum ultimum, ac tum reliquæ tres sexies permutari. Unde 24 diversi ordines quatuor litterarum existunt.*

Quinque a, b, c, d, e *permutationes subire possunt 120. Qualibet enim ex 5 datis ultimum tenente locum, reliquæ 4 vicibus 24 permutantur: unde litterarum 5 quinquies existunt 24 diversi ordines, hoc est 120. Atque ita in infinitum. Hoc præmisso sit.*

Theorema II.

Pars I. *Tres numeri A, B, C, quocumque inter se ordine multiplicati, semper æquales gignunt numeros.*

Sex diversos multiplicationum ordines exhibet tabella apposita. Quod producta sint æqualia, cum eadem littera ultimum locum tenet, ut in abc, & bac *&c. patet ex XVI. l. VII. Restat igitur, ut ostendam producta* aBc, aCb, bCa, *æqualia esse.*	aBc bac —— aCb cab —— bCa cba

a schol. 17. 7. aBc *Comparemus primum* aBc, & aCb. aCb aB *est ad* (a) aC, *ut* B *ad* C. *Sed* B, & C *sunt iidem numeri, qui* b, & c.

b 19. 7. *Ergo* aB *est ad* aC, *ut* b *ad* c. *Ergo* (b) *productum ex primo* aB *in quartum* c, *hoc est* aBc,

B c, *æquatur producto ex secundo* a C *in* b *tertium, hoc est ipsi* a C b. *Comparemus jam* a B c, *&* b C a. a B *est ad* b C, *ut* a *ad* C, *hoc est, ut* a *ad* c. *Ergo productum* a B c *æquatur producto* b C a *Liquet igitur omnia sex producta inter se æqualia esse.*

a B c
b C a

schol. p. 17. 7.
19. 7.

Pars II. Etiam 4 numeri a, b, c, d, *quocumque inter se ordine multiplicati, æquales gignent numeros.*

Ex Theor. patet a, b, c, d *admittere 4 senarios diversorum ordinum, hoc est ordines diversos 24. Senarius primus exhibetur in tabellâ apposita. Quoniam* a, b, c *quocumque inter se ordine multiplicati semper eumdem gignunt numerum per I. partem, & ultimus in toto senario est idem, patet omnia primi senarii producta esse unum idemque. Eodem modo ostendam sex producta secundi senarii inter se convenire. Atque id ipsum de senario tertio, quartoque demonstrabimus. Hoc igitur solum restat, ut productum unius senarii conveniat cum producto cujuslibet senariorum trium reliquorum. Quod sic ostendo.*

a b c d
b a c d
a c b d
c a b d
b c a d
c b a d

Comparemus senarium primum, in quo d *tenet locum ultimum, cum senario quarto, in quo* a *locum postremum occupat. Scribe* a *infra* d. *Tum ante* d *pone* A, *&* D, *ante* a, *& reliqua præfige utrique litteras* b c. *Igitur* b c A *est ad* b c D, (c) *ut* A *ad* D, *hoc est* a *ad* d. *Ergo producta* (d) b c d A d, *&* b c D a *senarii primi, & quarti æqualia sunt. Pari modo ostendam omnium 4 senariorum convenire producta. Liquet ergo propositum.*

b c A d
b c D a

c schol. 17. 7.
19. 7.

E

Pars

Pars III. Eodem discursu ex parte II. ostendam, producta ex multiplicatione 5 numerorum, quæ sunt 120, esse eadem, atque ita in infinitum, in numeris 6, 7, 8, &c.

PROPOSITIO XX.

SI inter duos planos A, & B cadat unus medius proportionalis C, similes plani erunt.

a 35. 7. Sumantur F, K, *a* minimi in ratione A ad C,
b 21. 7. & C ad B. Ergo *b* F, K æquè metiuntur tam ipsos A, C puta per X, quàm ipsos C, B, puta
c ax. 3. per Z. Igitur K in X, & Z *c* facit
d 17. 7. C, B, ac proinde, ut X est ad Z, *d* sic C est ad B, hoc est F ad K: & permutando F ad X,
e hyp. & ax. 8. ut K ad Z. Quare cum *e* F in X faciat A, & K in Z faciat B, ac proinde F, X, & K, Z
f def. 27 sint latera planorum A, & B; similes *f* plani erunt A, B. *Q. E. D.*

A	C	B
	F	K
	X	Z

PAULLÒ ALITER.

SI inter duos numeros A, B unus cadat medius proportionalis C, similes plani erunt.

A		C	B B
	D		E
	M		N
	DM	EM	EN

a 35. 7. Sumantur *a* D, E minimi in ratione A ad C, & C ad B. Igi-
b 21. 7. tur D, E æquè *b* metiuntur tam A, C, puta per M, quàm C, B, puta per N. Quare
c ax. 8. DM, productum nempe ex D in M, est *c* A
d idem. & EM *d* est C, & *e* EN est B. Jam in DM,
e idem. & EM latus D est ad latus E, ut *f* DM ad EM,
f schol. p. 17. 7. hoc est, ut A ad C, hoc est, ut *g* C ad B, hoc
g hyp. est,

eſt, ut EM ad EN, hoc eſt, ut *b* latus M ad latus N. Ergo DM, EN, hoc eſt A, B ſunt plani *i* ſimiles. *Q. E. D.* *b* ſchol. p. 17. 7. *i* def. 27.

PROPOSITIO XXI.

SI inter duos numeros A, B duo medii proportionales exiſtant numeri C, D, ſimiles ſolidi erunt A, B.

Sumantur *a* datis A, C, D tres minimi proportionales EP, X, OQ, *a* 35. 7.

A	C	D	B
EP	X	OQ	
	M	N	
EPM	XM	XN	OQN

qui æquè *b* metientur ipſos A, C, D, puta per M, ac proinde EPM, productum nempe ex EP in M, *c* eſt A, & XM *d* eſt C. Quia autem C, D, B ſunt in eâdem ratione, in quâ A, C, D, erunt EP, X, OQ etiam minimi proportionales ipſis C, D, B, eoſque proinde *e* metientur æquè, puta per N. Quare XN, productum nempe ex X in N, eſt *f* D, & OQN eſt B. Cum igitur EPM ſit A, & OQN ſit B, reliquum eſt, ut oſtendatur latera, E, P, M eſſe proportionalia lateribus, O, Q, N. *b* coroll. p. 21. 7. *c* ax 8. *d* idem. *e* coroll. p. 21. 7. *f* ax. 8.

A	C	D	B
EP	X	OQ	
	M	N	
EPM	XM	XN	OQN

Quoniam inter EP, & OQ *g* eſt medius proportionalis X, erunt EP, OQ *h* plani ſimiles; ideoq; *i* E eſt ad O, ut P ad Q. Deinde M eſt ad N, ut *k* XM ad XN, hoc eſt, ut jam oſtendi ſup., ut C ad D; hoc eſt, ut *l* EP ad X. Sed EP eſt, ad X, ut latus P ad latus Q, *g* conſt. *h* præced. *i* def. 27. *k* ſchol. p. 17. 7. *l* conſt.

m def. 12. quia tam *m* EP ad X, quàm *n* P ad Q est in ratione dimidiatâ EP ad OQ. Ergo *o* ut P ad Q, hoc est, ut E ad O, sic M ad N. Similes igitur *p* solidi sunt EPM, OQN, hoc est A, B. *Q. E. D.*

n 18. 8.

o 11. 12.

p def. 27.

PROPOSITIO XXII.

SI trium proportionalium numerorum A, B, C primus A sit quadratus, tertius C etiam quadratus erit.

Radix, sive latus quadrati A esto O. Quoniam igitur O multiplicans se facit A, erit, ut unitas (1) ad O, sic *a* O ad A, ac proinde tam inter A, & 1, quàm inter A, & C unus est medius proportionalis. Ergo etiam *b* inter 1, & C unus cadet medius P, qui proinde ductus in se *c* facit C. Ergo etiam C quadratus *d* est. *Q. E. D.*

A B C

O P

1

a def. 13.

b coroll 3. 10 8

c patet ex def. 13.

d def. 28.

Corollarium.

QUadratus, radix, unitas sunt continuè proportionales. Patet ex demonstratis

PROPOSITIO XXIII.

SI quatuor continuè proportionalium numerorum A, B, C, D primus A sit cubus, quartus etiam cubus erit.

A B C D

P R

Cubi A latus esto O. O in se faciat P. O Q

O Q

1

Igitur O in P *a* facit cubum A. Jam per coroll. præc. 1 est ad O, ut O ad P. Et quia O in P facit A, erit ut 1 ad O, hoc est, ut O ad P, sic *b* P ad A. Ergo tam inter A, & 1, quàm inter A, & D cadunt duo medii proportionales. Ergo etiam inter 1, & D duo medii *c* cadent Q. R. Cum ergo sit, ut 1 ad Q, sic Q ad R, patet *d* Q in se facere R. Et cum sit, ut 1 ad Q, sic R ad D, patet *e* Q in R facere D. Ergo *f* etiam D cubus est.

a def. 29.
b def. 13.
c coroll. 3. 10. 8.
d def. 13.
e ex ead.
f def. 29.

Corollarium.

UNitas, radix, quadratum, cubus sunt continuè proportionalia. Patet ex demonstratis.

PROPOSITIO XXIV.

SI duo numeri A, B eam inter se rationem habeant, quam quadratus aliquis C ad quadratum D; primus autem A sit quadratus, etiam secundus B quadratus erit.

A	O	B
C	P	D

Quoniam A est ad B, ut C ad D; & inter C, & D unus cadit medius *a* proportionalis P; etiam inter *b* A, & B unus cadet O. Quia igitur primus A quadratus est, etiam tertius *c* B quadratus erit. *Q. E. D.*

a 11. 8.
b 8. 1. 8.
c 22. 8.

PROPOSITIO XXV.

SI duo numeri A, B eam inter se rationem habeant, quam cubus C ad cubum D; primus autem A sit cubus, etiam secundus B cubus erit.

A	O	P	B
C	Q	R	D

Quia A est ad B, ut C ad D, atque inter cubos *a* C, D duo cadunt medii proportionales Q, R, etiam inter A, B duo *b* medii cadent. Quoniam ergo A cubus est, etiam B cubus *c* erit. *Q. E. D.*

a 12. 8.
b 8. 8.
c 23. 8.

Corollaria.

I. RAtio quadrati numeri ad non quadratum nequit exprimi in duobus quadratis. Patet ex XXV.

II. Ratio cubi ad non cubum nequit exhiberi in duobus cubis. Patet ex XXV.

PROPOSITIO XXVI.

SImiles plani A, B eam inter se rationem habent, quam quadratus aliquis ad quadratum.

A	C	B
D	E	F

Inter A, & B cadit unus *a* medius proportionalis, qui esto C. In ratione A ad C, seu C ad B accipiantur tres minimi D, E, F. Extremi D, F erunt *b* quadrati. Quoniam ergo A est ad C, ut *c* D ad E, & C ad B, *d* ut E ad F; erit ex

a 18. 8.
b coroll. 3. p. 2 l. 8
c const.
d const.

æquo;

æquo *c* A ad B, ut quadratus C ad quadratum *c* 22.7.
F. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XXVII.

Similes solidi A, B eam inter se rationem habent, quam aliquis cubus ad cubum.

A	C	D	B
E	G	H	F

Inter A, & B duo *a* cadunt medii proportionales, qui sint C, D. In ratione A ad C capiantur quatuor minimi E, G, H, F. Extremi E, & F erunt *b* cubi, eritque ex *b* æquo A ad B, ut E cubus ad cubum F. *Q. E. D.*

a 19.8.
b corol. 1. p. 2.

ELEMENTORUM ARITHMETICÆ

LIBER TERTIUS.

EUCLIDI VERO' NONUS.

PROPOSITIO PRIMA.

DUo similes plani A, B, se mutuò multiplicantes, quadratum producunt AB.

A O B

AA P AB

Ex A in se faciat AA. Erit igitur AA ad AB, ut *a* A ad B. Sed inter *b* A, & B cadit unus medius proportionalis, cum sint A, & B plani similes. Ergo etiam inter *c* AA, & AB medius cadet P. Quare cum primus AA sit quadratus per constructionem, etiam tertius AB quadratus *d* erit. *Q. E. D.*

a schol. p 17. 7. *b* 18. 8. *c* 8. 8. *d* 22. 8.

PROPOSITIO II.

SI duo numeri A, B se invicem multiplicantes quadratum gignant AB, similes plani erunt.

A O B

AA P AB.

A in se fit AA. Quoniam AA, AB ambo quadrati sunt, cadet inter *a* eos medius proportionalis. Sed AA est ad AB, ut *b* A ad B. Ergo etiam inter A, & B *c* cadet medius proportio-

a 11. 8. *b* schol. 17. 7. *c* 8. 8.

portionalis. Ergo A, B sunt *d* plani similes. *d* 20. 8.
Q. E. *D*.

Corollaria.

I. DUo quadrati quadratum producunt. Sunt enim similes plani. Ergo per I. hujus inter se mutuò multiplicati quadratum generant.

II. Si duo numeri A, B quadratum producunt, & alter eorum, puta A, sit quadratus, etiam B quadratus erit.

Nam per prop. II. A, & B sunt plani similes. Ergo inter *a* A, B cadit medius proportionalis. Cum ergo A primus sit quadratus, *a* 18. 8. etiam tertius B *b* quadratus erit.

III. Si duo numeri A, & B producant non *b* 22. 8. quadratum, A verò sit quadratus, B quadratus non erit.

Nam, si etiam B quadratus esset, duo A, & B per corollarium I. producerent quadratum, contra hypothesim.

IV. Quadratus A, & non quadratus B producunt non quadratum. Aliàs per corollarium II. etiam B quadratus foret, contra hypothesim.

PROPOSITIO III.

CUbus numerus CCC, seipsum multiplicans, facit cubum D.

CCC Cubi radix, seù latus esto
* CC C. Per corollarium p. XXIII.
* C lib. VIII. 1, C, CC, CCC,
D 1

Corol-

sunt continuè proportionales, adeoque inter 1, & CCC cadunt duo medii proportionales.
a def. 13. Sed, quia CCC in seipsum fecit D, erit *a* ut 1
b 8. 8. ad CCC, ita CCC ad D. Ergo etiam *b* inter CCC, & D cadunt duo medii. Quare, cum
c 23. 8. primus CCC sit cubus, etiam quartus D cubus *c* erit. *Q. E. D.*

PROPOSITIO IV.

EX cubo A in cubum B fit cubus AB.

	A	B
	AA	AB

a præc. Ex a in se fit AA. Erit *a* AA cubus. Et quoniam A, & B cubi sunt, cadent inter eos duo
b 12. 8. medii *b* proportionales. Sed AA est ad AB,
c schol. p. 17. 7. *c* ut A ad B. Ergo & inter AA, AB *d* cadent duo medii. Quare cum primus A sit cubus,
d 8. l. 8. etiam quartus *e* AB erit cubus. *Q. E. D.*
e 23. 8.

PROPOSITIO V.

SI cubus A multiplicans aliquem numerum B gignat AB cubum, etiam multiplicatus B cubus erit.

	A	B
	AA	AB

Cubus A in se faciat AA.
a 3. 9. Erit *a* AA cubus, Quoniam igitur AA, & AB ambo
b 12. 8. cubi sunt, inter eos cadent duo *b* medii pro-
c schol. p. 27. 7. portionales. Sed AA est ad AB, *c* ut A ad B. Ergo etiam inter A, & B *d* cadent duo
d 8. 8. medii. Quare, cum primus A cubus sit,
e 23. 3. etiam *e* quartus B cubus erit. *Q. E. D.*

Corol-

Corollaria.

1. EX cubo A in non cubum X fit non cubus. Aliàs enim per V. etiam X foret cubus, contra hypothesim.

2. Si cubus A in B faciat non cubum, neque B cubus erit. Aliàs per IV, etiam factus ex A in B foret cubus, contra hypothesim.

PROPOSITIO VI.

SI numerus A, in se ductus, facit cubum B, & ipse cubus est.

A in B producat E. Quoniam A in se fecit B, & A rursum in B fecit E. patet, E *a* cubum esse. Et, quia A in B cubum fecit E cubum, etiam B cubus in A facit *b* cubum E. Ergo & A *c* cubus est. *Q. E. D.*

A
B E

a def. 19.
b 17. 7.
c 5. 9.

PROPOSITIO VII.

COmpositus numerus A, multiplicans quemvis numerum B, generat solidum E.

Compositum numerum A aliquis, præter unitatem, metiatur *a* numerus, qui sit C, per aliquem numerum, qui sit D. Ergo C in D est *b* A. Sed A in B *c* est E. Ergo E fit ex multiplicatione trium C D. B. Ergo E solidus *d* est. *Q. E. D.*

A B E
C D

a def. 12.
b ax. 8.
c hyp.
d def. 26.

Lem-

sunt continuè proportionales, adeoque inter 1, & CCC cadunt duo medii proportionales.
a def. 13. Sed, quia CCC in seipsum fecit D, erit a ut 1
b 8. 8. ad CCC, ita CCC ad D. Ergo etiam b inter CCC, & D cadunt duo medii. Quare, cum
c 23. 8. primus CCC sit cubus, etiam quartus D cubus c erit. Q. E. D.

PROPOSITIO IV.

Ex cubo A in cubum B fit cubus AB.

a præc. Ex a in se fit AA. Erit a AA cubus. Et quoniam A, & B cubi sunt, cadent inter eos duo
b 12. 8. medii b proportionales. Sed AA est ad AB,
c schol.p. 17.7. c ut A ad B. Ergo & inter AA, AB d cadent
d 8. l. 8. duo medii. Quare cum primus A sit cubus,
e 23. 8. etiam quartus e AB erit cubus. Q. E. D.

A	B
AA	AB

PROPOSITIO V.

Si cubus A multiplicans aliquem numerum B gignat AB cubum, etiam multiplicatus B cubus erit.

a 3. 9. Cubus A in se faciat AA. Erit a AA cubus, Quoniam
b 12. 8. igitur AA, & AB ambo
c schol.p. 17.7. cubi sunt, inter eos cadent duo b medii proportionales: Sed AA est ad AB, c ut A ad
d 8. 8. B. Ergo etiam inter A, & B d cadent duo
e 23. 8. medii. Quare, cum primus A cubus sit, etiam e quartus B cubus erit. Q. E. D.

A	B
AA	AB

Corol-

Corollaria.

1. EX cubo A in non cubum X fit non cubus. Aliàs enim per V. etiam X foret cubus, contra hypothesim.

2. Si cubus A in B faciat non cubum, neque B cubus erit. Aliàs per IV, etiam factus ex A in B foret cubus, contra hypothesim.

PROPOSITIO VI.

SI numerus A, in se ductus, facit cubum B, & ipse cubus est.

	A	
	B	E

A in B producat E. Quoniam A in se fecit B, & A rursum in B fecit E. patet, E *a* cubum esse. Et, quia A in B cubum fecit E cubum, etiam B cubus in A facit *b* cubum E. Ergo & A *c* cubus est. *Q. E. D.*

a def. 19.
b 17. 7.
c 5. 9.

PROPOSITIO VII.

COmpositus numerus A, multiplicans quemvis numerum B, generat solidum E.

A	B	E
C	D	

Compositum numerum A aliquis, præter unitatem, metiatur *a* numerus, qui sit C, per aliquem numerum, qui sit D. Ergo C in D est *b* A. Sed A in B *c* est E. Ergo E fit ex multiplicatione trium C D. B. Ergo E solidus *d* est. *Q. E. D.*

a def. 12.
b ax. 8.
c hyp.
d def. 16.

Lem-

Lemma.

In ſerie numerorum ab unitate continuè proportionalium 1, A, B, C, D, E, &c., numerus A primus ab unitate, multiplicans quemlibet D, producit ſequentem E.

e def. 13. Erit enim *e* ut 1 ad A, ita D ad E: ex quo res patet.

PROPOSITIO VIII.

SI numeri quotcunque fuerint ab unitate continuè proportionales; B ſecundus, unitate ſeclusâ, quadratus erit, & uno intermiſſo, omnes D, F, H, &c.

Tertius autem C cubus eſt, & duobus intermiſſis, omnes F, K, &c.

Sextus vero F cubus ſimul, & quadratus, & quinque intermiſſis, omnes.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1.	A.	B.	C.	D.	E.	F.	G.	H.	K.	L.	M.	N.	O.
1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	*&c.*					

Pars I. Quoniam, ut 1 eſt ad A, ſic A eſt ad

a def. 13. B: patet *a* A in ſe facere B, ac *b* proinde B

b def. 28. quadratus eſt. Deinde quia B, C, D ſunt continuè proportionales, & B quadratus eſt, etiam

c 22. 8. *c* D quadratus erit: & ſic deinceps uno intermiſſo.

d lem. Pars II. Quoniam A in ſe fecit B, & A rur-

e def. 29. ſum *d* in B facit C; erit *e* C cubus. Deinde

quia

quia C, D, E, F sunt quatuor continuè proportionales, & C cubus est, etiam F cubus ff 23 8. erit, & sic deinceps duobus semper intermissis.

Pars III. Patet ex I. & II.

Scholium.

QUoniam primus in serie numerus A, multiplicans quemcunque alium ex serie, producit sequentem, liquet continuè proportionalium seriem pulcherrimè exprimi solâ litteræ A, numerum quemlibet designantis, continuâ appositione, hunc in modum.

0	1	2	3	4	5	
1.	A.	AA.	AAA.	AAAA.	AAAAA.	A 6.
	A 7.	A 8.	A 9.	A 10.	A 11.	A 12.

A quippe in seipsum, facit AA quadratum: A in AA, facit AAA cubum, & sic deinceps. Quin verò sic tota propositionis demonstratio uno intuitu perspicitur. Quoniam enim multiplicationis productum litterarum appositione exhibetur, liquet quadratum esse, cum litterarum multitudo par est, quam proinde binarius metiatur, ut fit loco secundo, quarto, & sequentibus, uno intermisso. Rursum liquet, tum esse cubum, cum numerum litterarum metitur ternarius, ac proinde trisecari potest, quod evenit loco tertio, sexto, & sequentibus, binis semper intermissis. Denique apparet, cum litterarum multitudo est numerus primus, ut 5, 7, 11, 13, &c., nec cubum haberi, nec quadratum, quia nimirum, cum primos numeros nullus numerus metiatur, litterarum multitudo

tum

tum nequit aut bisecari, quod ad quadraticam, aut trisecari, quod ad cubicam multiplicationem requiritur. Solent ab Arithmeticis hi numeri surdesolidi, sive supersolidi appellari. Omnes autem reliqui progressionis termini vel quadrati, vel cubi sunt, vel utrumque, quia cum numeri litterarum, seu dimensionum, quibus constant, sint compositi, eos vel binarius, vel ternarius, vel uterque metitur; ac proinde aut bisecari possunt, aut trisecari, aut utrumque.

Solent porro numeri progressionis jam dictæ vocari potestates, ac scribi supra eos numeri ordine naturali, qui locum, seu dimensiones singulorum indicent, dicunturque exponentes. Itaque in priori serie, quâ ante Scholium usi sumus, A est primus terminus, vocaturque radix; B secundus, seu duarum dimensionum, & quadratus dicitur; C tertius, seu trium dimensionum, & cubus appellatur, &c. In alterâ serie ipsa litterarum multitudo locum, latera, ac dimensiones potestatum singularum exprimit.

Ex dictis supra patet I. in quâcumque serie continuè proportionalium, terminum, cujus exponens est 6, esse simul cubum, & quadratum: numerus enim laterum ejus, cum mensuretur a 2, & 3, poterit bisecari, ac trisecari. II. intermissis semper 5, reliquos omnes fore cubos simul, & quadratos, terminum videlicet 12, 18, 24, & cæteros, quorum exponentes senarius metitur. Cum enim tam 2, quàm 3 metiantur 6, 6 autem metiatur 12, 18, 24, &c. etiam tam 2, quàm 3 eosdem omnes metientur, qui proinde, & bisecari poterunt, & trisecari. Ergo, &c.

PRO-

PROPOSITIO IX.

SI in serie continuè proportionalium ab unitate numerorum primus A sit quadratus, reliqui omnes quadrati erunt.

Si primus est cubus, reliqui etiam omnes cubi erunt.

Pars I. Quoniam A per hypothesim, & B per præc. quadrati sunt, & A in B facit C, etiam *a* C quadratus erit. Rursum, quia quadratus A in quadratum C *b* facit D, etiam D quadratus erit. Et sic deinceps.

1 A B C D E F

a coroll. 2. 9.
b lem.

Pars II. Quoniam A per hypothesim cubus est, & A in se facit B, etiam B cubus erit. Et quia A cubus in B cubum *d* facit C, etiam *e* C cubus erit. Et sic deinceps.

c 3. 9.
d lem.
e 4. 9.

PROPOSITIO X.

SI continuè proportionalium ab unitate numerorum primus A quadratus non sit, neque alius ullus quadratus erit, præter secundum B, & reliquos, uno semper intermisso, sequentes D, F, &c.

Et si primus A non sit cubus, neque alius ullus cubus erit, præter tertium C, & reliquos, duobus intermissis, sequentes F, &c.

Pars I. Sit enim, si fieri potest, E quadratus. Quoniam igitur E est ad D, ut B ad A, suntque quadrati *a* E, *b* D, B, etiam *c* A quadratus erit, contra hypothesim.

1 A B C D E F G

a quia ponitur.
b. 18. 9.
c 24. 5.

Pars

Pars II. Esto, si fieri potest, D cubus.
d 8.9. Cum ergo etiam cubi sint *d* F, & C, sitque per hypothesim, & ex æquo, ut F ad C, sic
e 25. 8. D ad A, etiam A *e* cubus erit, contra hypothesim.

PROPOSITIO XI.

IN serie numerorum ab unitate continuè proportionalium minor quilibet C quemlibet majorem G metitur per aliquem numerum, qui est in serie.

1 A B C D E F G

f def. 15. Ex æquo enim C est ad G, ut 1. ad D. Ergo C metitur *f* G per D.

Corollaria.

I. QUantum major G distat a metiente C, tantum D, is per quem minor majorem metitur, distat ab unitate.

II. Primus A metitur quemlibet D per præcedentem C.

III. Quivis in serie numerus C, seipsum multiplicans, producit numerum F, eodem a se intervallo distantem, quo ipse ab unitate.

IV. Si quivis in serie numerus B multiplicet quemvis D etiam in serie, quantum distat 1 a minore B, tantum distabit major D a producto F.

PRO-

PROPOSITIO XII.

SI ab unitate fuerint numeri quotcumque continuè proportionales; primus numerus E, qui metitur ultimum D, metietur & unitati proximum A.

1	A	B	C	D
	E	H	G	F

Ponatur enim, si fieri potest, E primum non metiri A. Ergo *a* E, & A sunt primi inter se. Quoniam verò E metitur D, metiatur eum per F. Metitur autem & A eumdem *b* D per C. Ergo E est ad A, ut *c* reciprocè C ad F. Sed quia E, & A sunt primi inter se, erunt minimi *d* in suâ proportione. Ergo E metitur C, *e* puta per G. Quare, cum eumdem C metiatur *f* A per B, rursum erit E ad A, *g* ut B ad G. Ergo quia E, A sunt in suâ proportione minimi, iterum E metitur *h* B, puta per H. Atqui etiam A metitur B per A; nam A in se facit B, ut patet ex VIII. Ergo rursum *i* E est ad A, ut A ad H.

a 3. 7. *b* coroll. 2. præc. *c* corol. 1. 19. 7. *d* 23. 7. *e* 21. 7. *f* coroll. 2. præced. *g* corol. 1. 19. 7. *h* 21. 7. *i* coroll. 19. 7. *k* 21. 7.

A	A
E	H

Quare, cum E, A sint in proportione suâ minimi, E *k* metitur A. *Q. E. D.*

Scholium.

PUlchra, & subtilis hæc demonstratio est, in qua ex contradictorio assertionis assertio ipsa directa demonstratione infertur. De hoc genere demonstrationis vide, si lubet, quæ disseruimus in Appendice post Elementa Geometriæ.

PROPOSITIO XIII.

SI numerorum ab unitate continuè proportionalium proximus unitati A primus est; maximum D nullus alius metietur præter eos, qui sunt in numeris proportionalibus.

1	A	B	C	D
	E	F	G	H
	O			

I. Metiatur enim, si fieri potest, E diversus ab ipsis A, B, C, maximum D. Non erit E primus, aliàs etiam E metiretur *a* A, ac proinde A non esset primus, contra hypothesim. Igitur E compositus est; ac proinde eum metitur *b* aliquis primus.

a præc.
b 34. 7.

II. Quem dico esse A. Si enim alius primus O metiretur E, quoniam E metitur D, etiam O *c* metiretur D, adeoque *d* & ipsum A: quod est absurdum, cum A primus sit. Metiatur jam E ipsum D per H.

c ax. 11.
d præc.

1	A	B	C	D
	E	F	G	H
	O			

III. Erit H diversus ab A, B, C. Sit enim, si fieri potest, H idem cum aliquo ipsorum A, B, C, puta cum C. Ergo E metietur D per C, ac proinde etiam C *e* metitur D per E. Ergo E est unus *f* ex serie A, B, C: quod est absurdum, cum E volueris esse non unum ex serie A, B, C. Ergo H diversus est ab ipsis A, B, C.

e ax 9.
f 11. 9.

IV. Deinde H non erit primus, aliàs cum H metiatur D, metiretur *g* quoque A, primum ex hypothesi: quod est absurdum. H igitur compositus est.

g præc.

V. Quia autem H compositus est, metietur eum

eum aliquis primus, quem dico esse A. Si enim alius primus O metietur H, cum H metiatur D, (nam quia E per H metitur D, etiam H *b* per E metietur D) metietur quoque *i* O ipsum D, ac proinde etiam *k* ipsum A primum: quod est absurdum. *b* ax. 9. *i* ax. 11. *k* præc.

VI. Jam quia A metitur *l* D per C, itemque E metitur D, per H; erit, ut A ad E *m*, ita reciprocè H ad C, Quare, cum, ut ostendi num. I, A metiatur E, etiam H metietur C, puta per G. Quoniam igitur, sicut E diversus ab A, B, C metiebatur postremum D per H, ita nunc H (quem jam ostendi num. III. diversum esse ab A, B, C,) metitur ipsorum A, B, C postremum C per G. Ostendam eodem modo G distinctum esse ab A, B, & non esse primum, & mensurari ab A, quo hæc tria ostendi de numero H. *l* coroll. 2. 11. 9. *m* coroll. 19. 7.

Quia ergo A metitur C *n* per B, & H metitur C per G: erit, ut *o* A ad H, ita reciprocè G ad B. Sed ostendi num. V. A metiri H. Ergo etiam G metitur B, puta per F. Ostendam rursus F diversum esse ab A, planè, ut ostendi num. III. H esse diversum ab A, B, C, & G ab A, B. *n* coroll. 2. 11. 9. *o* coroll. 19. 7.

Quoniam igitur A per A, hoc est per se, metitur B, & G per F metitur B; erit, ut A ad G, *p* sic reciprocè F ad A. Sed est ostensum num. VI. A metiri G. Ergo etiam F metitur A: quod est absurdum, cum A primus sit. Sed hoc absurdum inde deductum est, quod poneretur, E diversum ab A, B, C, metiri D. Liquet ergo nullum ab A, B, C diversum metiri D. *Q. E. D.* *p* coroll. 1. 19. 7.

Scholium.

HÆc demonstratio, quæ ratiocinationis flexu mirabili tandem infert quæsitum, meritò e difficilioribus una videri potest. Breviorem aliam substituit Claudius Richardus noster, Euclidis Commentator præclarus; sed eâ non confici propositum, facilè intelliget, qui legerit.

PROPOSITIO XIV.

MInimum numerum A, quem primi numeri B, C, D metiuntur, nullus alius primus, præter datos, metitur.

A
B C D
E F

Metiatur, si fieri potest, minimum A alius quispiam primus E per F. Ergo E in F facit *a* A, ac proinde E, F sunt latera ipsius A. Quoniam ergo B, C, D metiuntur A, metiuntur quoque *b* alterutrum E, F. Non E primum. Ergo F. Sed F minor est, quàm A: nam F in E facit A. Ergo A non est minimus, quem metiuntur B, C, D. Quod hypothesim evertit.

a ax. 8.
b 32. 7.

PROPOSITIO XV.

SI fuerint tres proportionales in ratione sua minimi AA. AB, BB; duo quilibet compositi ad reliquum primi erunt.

A B
AA AB BB

Ex prop. II. lib. VIII. manifestum est, si A, B duo minimi ponantur in ratione datâ; AA,

AB,

AB, BB fore tres minimos in eâdem ratione.
Jam quia A, & B sunt *a* primi inter se, etiam *a* 24. 7.
b A+B ad B primus est, Sed etiam A ad B pri *b* 30. 7.
mus est. Ergo etiam *c* factus ex A+B in A, *c* 26. 7.
nempe AA + AB, ad B primus est. Quare
AA + AB ad BB etiam *d* primus erit, Eodem *d* 27. 7.
planè modo ostendam, BB + AB ad AA esse
primum.

Reliquum est, ut etiam AA + BB ad AB
primus sit. Quoniam A, B sunt primi inter se,
ac proinde *e* etiam tam A, quàm B ad A + B *e* 30. 7.
primus est; erit quoque AB, genitus ex A in
B, ad A + B *f* primus. Ergo AB ad *g* ipsius *f* 26. 7.
A+B quadratum, hoc est ad *h* AA + BB + *g* 4. 2.
2 AB, primus est. Ergo dividendo AB pri- *h* 27 7.
mus *i* est ad AA + BB + AB. Ergo rursum *i* 30. 7.
k dividendo AB primus est ad AA + BB. *k* ibid.
Q. E. D.

PROPOSITIO XVI.

D*Uobus numeris inter se primis A, & B, nequit tertius proportionalis exhiberi.*

A	B	b	C
5	7	7	

Sit enim, si fieri potest, ut A ad B, sic b ad alium C. Quia pri-
mi sunt inter se A, & B, erunt *a* minimi sibi *a* 23. 7.
proportionalium. Ergo A *b* metitur b. Sed *b* 21. 7.
etiam A metitur se. Ergo A, & b sunt inter *c* *c* def. 14.
se compositi, contra hypothesim. Quod est
absurdum.

PROPOSITIO XVII.

SI in continuè proportionalium ſerie extremi A, D ſunt primi inter ſe, ea non poterit ulterius continuari.

Sit enim, ſi fieri poteſt, A B C D E ut A ad B, & B ad C, &c. ſic D ad alium E. Igitur permutando, ut A ad D, ſic B ad E. Sed A, & D ſunt *a* inter ſe primi, ac proinde *b* minimi in ſuâ ratione. Ergo *c* A metitur B. Sed B metitur *d* C, & C metitur D. Ergo A *e* metitur D. Sed & A metitur ſe. Ergo *f* A, & D ſunt inter ſe compoſiti: contra hypotheſim.

a hyp.
b 23. 7.
c 21. 7.
d 1. 9.
e ax. 11.
f def. 24.

PROPOSITIO XVIII.

DUobus numeris datis A, B conſiderare, an poſſit ipſis tertius proportionalis exhiberi.

Si A, B ſunt primi inter ſe, A B X non poſſe reperiri tertium, patet BB ex XVI.

Si A, B ſunt inter ſe primi, B in ſe faciat BB. Si A metitur BB, puta per X; erit X tertius proportionalis. Nam X in A *a* facit BB. Sed & B in ſe facit BB. Ergo *b* A eſt ad B, ut B ad X.

a ax. 8.
b 20. 7.

Si A non metitur BB, non A B Z poterit exhiberi tertius propor- BB tionalis. Detur enim, ſi fieri poteſt, Z. Ergo A in Z facit BB, eumdem *c*, quem

c ibid.

quem B in se. Quia ergo A in Z est BB, A per Z metietur *d* BB: contra hypothesim. *d* ax. 7.

PROPOSITIO XIX.

Tribus numeris datis A, B, C considerare, an quartus proportionalis possit exiberi.

A B C X
BC

Secundus B, in tertium C ductus, faciat BC. Si primus A metitur BC, puta per X; erit X quartus proportionalis. Nam tunc A in X *a* faciet BC, æquè ac B in C. Ergo *b* ut A ad B, sic C ad X. *a* ax. 8. *b* 19. 7.

A B C Z
BC

Si A non metitur BC, non poterit exhiberi quartus proportionalis. Detur enim Z, si fieri potest. Ergo A in Z *c* faciet BC, eumdem, quem B facit in C. Ergo A *d* metietur BC per Z: contra hypotesim. *c* 19. 7. *d* ax. 7.

Scholium.

Propositiones quatuor præcedentes intelligendæ sunt de numeris integris. Quibusvis enim duobus numeris tertius, & quibusvis tribus quartus proportionalis exhiberi potest per fractiones, ut docebitur in Arithmeticâ practicâ.

Hoc verò observatu dignum est, quod suo e loco demonstrabimus, quamvis duobus quibuslibet tertius proportionalis, & tribus quartus, saltem fractus, dari possit, tamen inter quos medius integer dari nequit, inter eos neque fractus quidem ullus poterit exhiberi. *e* Arith. pract. l. 5. c. 7.

Datis tribus numeris, A, B, C, quartus proportionalis invenitur etiam hunc in modum.

A B C Z
D

Primus A, dividens secundum B, faciat quotientem D. Tertius C, multiplicans D, gignat Z. Hic est quæsitus.

f ax. 8. *Cum enim A dividat B per D, etiam* f *A in*
g 17.7. *D faciet B. Sed & C in D* g *gignit Z. Ergo A*
h 17.7. *est ad B,* h *ut C ad Z.*

Impossibilis erit quartus proportionalis integer, non si A non metitur B, sed si factus ex C in D non sit integer, aut ad integrum reducibilis.

PROPOSITIO XX.

Primi numeri sunt infiniti.

A B C
X + 1.
Z

Dentur primi tres A, B,
a 38.7. C. Inveni X minimum, *a* quem A, B, C metiuntur, cui adde unitatem. Si X + 1. primus est, jam quartus habebitur primus. Si
b 34. 7. X + 1 non est primus, eum aliquis *b* primus metietur, puta Z. Hic erit primus, a datis A, B, C diversus. Sit enim, si fieri potest, idem cum datorum aliquo C. Ergo, quia C metitur X, etiam Z metietur X. Sed Z etiam metitur X + 1. Ergo Z metietur *c* quoque 1: quod est
c ax. 12. absurdum. Ergo Z novus primus est. Eodem modo invenientur plures sine termino.

PRO-

PROPOSITIO XXI.

NUmeri pares quotcumque A, B, C componunt parem.

A B C Quoniam A, B, C pares sunt,
N O P eorum *a* semisses sint N, O, P. *a* def. 16.
Quia igitur est, ut A ad N, sic B ad O, & C ad P; erit ut A ad N, *b* sic summa A, B, C ad summam N, O, P. Sed A est duplus ipsius N. Ergo summa A, B, C dupla est summæ N, O, P, adeoque summa N, O, P est semissis summæ A, B, C. Ergo summa A, B, C *c* par numerus est. *Q. E. D.*

b 12. 5.
c def. 16.

PROPOSITIO XXII.

IMpares A, B, C, D multitudine pari componunt parem.

A B C D Aufer à singulis unitatem. Tum & *a* reliqui pares erunt, & unitates ablatæ *b* parem component. Quare per præcedent. reliqua, & ablata simul, hoc est ipsi A, B, C, D component parem.

a def. 17.
b hyp.

PROPOSITIO XXIII.

IMpares A, B, C multitudine impari componunt imparem.

Quoniam *c* impar à pari differt unitate, erit C — 1

A B C — 1
C par.

c def. 17.

d præc. par. Sed & impares A, B *d* componunt parem. Ergo A, B, C—1 componunt parem. Sed summa A, B, C—1 ab summâ A, B, C differt unitate. Ergo summa A, B, C est numerus *e* impar. *Q. E. D.*
e def. 17.

Corollarium.

PAri ratione impar additus pari componit imparem.

PROPOSITIO XXIV.

SI a pari numero D subtrahatur par E, reliquus F par erit.

Nam si reliquus F foret impar, cum pari E componeret *a* imparem Sed F cum E componit D. Ergo D impar esset: contra hypothesim.

a coroll. præc.

D
E
F

PROPOSITIO XXV.

SI a pari numero A impar B subtrahatur, reliquus C erit impar.

Nam si reliquus C esset par, is cum impari B faceret *b* imparem, Sed C cum B facit A. Ergo A foret impar: contra hypothesim.

b coroll. 23.7.

A
B
C

PROPOSITIO XXVI.

SI ab impare E subtrahatur impar F, reliquus G erit par.

Nam

Nam si G foret impar, is cum impare F componeret E *c* parem. Quod evertit hypothesim. E F G *c* 22. 9.

PROPOSITIO XXVII.

SI ab impare A subtrahatur par B, reliquus C erit impar.

A B C

Nam si C foret par, is cum pari B componeret *a* A parem: contra hypothesim. *a* 28. 9.

PROPOSITIO XXVIII.

PAr, & impar A, B invicem multiplicantes producunt C parem.

A 2. B 3. C 6.

Componitur *b* enim C ex pari A toties sumpto, quot sunt unitates in B. Ergo C par *c* est. def. 14. *c* 21. 9.

Corollaria.

I. PAr multiplicans parem gignit parem. Patet eodem modo ex XXI.

II. Omnis pariter impar est par. Patet ex defin. XIX., axioma. VII., & hac propositione.

PROPOSITIO XXIX.

IMpar D multiplicans imparem E producit imparem F.

a def. 13. D 3. E 5. F 15 Componitur a enim F ex D impare toties sumpto, quot sunt unitates in impare E. Ergo F impar b est.

b 23. 9.

Corollaria.

12 B, 3 A { C 4. I. IMpar A metiens parem B eum metitur per parem C. Nam si C

c ax. 8. foret impar, quia A in C c producit B,

d 29. 9. esset B d impar, utpote genitus ex impare A in imparem C. Quod repugnat hypothesi.

15 E, 3 D { F 5. II. Impar D metiens imparem E eum metitur per imparem F. Nam si F foret par, quoniam D impar in F parem gignit a E, esset E b par: contra hypothesim.

a ax. 8.

b 28. 9.

Scholium.

EX his demonstrari jam poterit, nullum numerum AB ita secari posse, ut genitus ex toto AB in unam partem CB sit æqualis quadrato partis alterius AC: ac proinde propositionem XI. lib. II. nullo modo posse numeris applicari, quamvis decem primæ ejusdem libri propositiones omnes etiam in numeris sint veræ.

A——C——B
D—E—

Sit enim, si fieri potest, genitus ex AB in CB par quadrato ex AC.

Vel AC par est, & CB impar.
Vel AC impar, & CB par.
Vel uterque AC, & CB impar.
Vel uterque par.

Esto

Esto primum AC par, & CB impar. Ergo a *totus AB est* a *impar. Ergo genitus ex AB impare in CB imparem, impar* b *est. Est* c *verò par quadratus, ex AC pari. Ergo impar, genitus ex AB in CB, æquatur pari, nempe quadrato ex AC. Quod est absurdum.*

a coroll. 23. 9.
b 29. 9.
c coroll. 28. 9.

Sit deinde AC impar, & CB par. Ergo totus AB d *impar est. Ergo factus ex impare AB in CB parem par* e *est. Atqui quadratus imparis AC impar* f *est. Ergo rursum hic impar illi pari æqualis est. Quod est absurdum.*

d coroll. 23. 9.
e 28. 9.
f 29. 9.

Sit tertiò uterque AC, CB impar. Ergo totus AB g *par est. Ergo factus ex AB pari in imparem CB par* h *est. Imparis autem AC quadratus* i *impar est. Ergo rursum hic impar illi pari ex AB in CB æqualis est. Quod est absurdum.*

g 22. 9.
h 28. 9.
i 29. 9.

Sit denique uterque AC, CB par. Sumantur duo minimi D, E in ratione AC ad CB. Erunt D, E primi k *inter se, ac proinde nequeunt ambo esse pares, aliàs metiretur eos binarius; sed vel ambo sunt impares, vel D par, E impar, vel D impar, E par. Jam, quia AB in CB æquatur quadrato AC, erit, ut AB ad AC, ita AC ad CB. Et quia E est ad D, ut BC ad CA, erit componendo E cum D ad D, ut BA ad AC; hoc est, ut* l *AC ad CB, hoc est, ut* m *D ad E. Quoniam igitur D cum E est ad D, ut D ad E, erit genitus ex D cum E in E æqualis quadrato ex D. Quod fieri non posse, tribus primis partibus demonstratum est.*

k 24. 7.
l ostendi ante.
m hyp.

At quispiam suspicabitur ita secari fortassis numerum posse in duas partes, quibus fractiones adhæreant. Verum si illæ partes reducantur

ad

ad duas fractiones ejusdem denominationis, ut docebitur in Arithm. Pract. lib. II. c. III. prob. II. facilè apparebit, ne id quidem esse possibile.

PROPOSITIO XXX.

SI impar B metiatur parem A, & illius dimidium metietur.

12	A	{	C 4
3	B		

Impar B metiatur A parem per C. Erit *a* C par, & C metietur quoque A *b* per B. Ergo & dimidium ipsius C metietur dimidium ipsius A per B (est enim ut C ad A, sic dimidium C ad dimidium A.) Ergo etiam B per dimidium C metietur *c* dimidium A. *Q. E. D.*

a coroll. 1.
b 9. 9.
c ax. 9.
c idem.

PROPOSITIO XXXI.

SI impar A ad aliquem B primus est, etiam ad illius duplum C primus erit.

A 3.		B 5.	
C 10.		D E	

Nam si A, & C non sint primi inter se, metiatur eos aliquis D, A quidem per E. Erit D necessariò impar, aliàs D par in E gigneret A *a* parem. Quoniam ergo D impar metitur C parem (est enim C par, cum duplus sit B,) etiam D metietur *b* B ejus dimidium. Ponebas autem etiam D metiri A. Ergo A, B non sunt primi inter se: contra hypothesim.

a 28. 9.
b præc.

Corol-

Corollarium.

IMpar A, qui primus eſt ad aliquem B, etiam primus eſt non ſolum ad duplum B, ſed etiam ad quadruplum, octuplum, &c. Patet ex propoſitione.

PROPOSITIO XXXII.

SI proportio dupla ab unitate continuetur in infinitum 1, 2, 4, 8, 16, &c. habentur omnes pariter pares tantùm.

1	A	B	C	D	E	F	
1.	2.	4	8.	16.	32.	64.	
				1	R	P	O

Quod ſinguli ſint pariter pares, patet ex XI. l. IX. Per hanc enim 2. metitur quemlibet in ſerie, per aliquem ex ſerie, hoc eſt per parem. Ergo per definitionem XVIII.

Quod ſint pariter pares tantùm, patet ex XIII. lib. IX. Cum enim 2 proximus unitati ſit primus, nullus metietur ullum ipſorum 2, 4, 8, &c. præter eos, qui ſunt in ſerie, hoc eſt præter pares. Ergo per definitionem XVIII.

Quod nullus præter hos ſit pariter par tantùm, ſic oſtendo. Eſto tantùm pariter par quiſ, cumque O, cujus dimidium ſit P, hic erit par; aliàs ſi P foret impar, binarius per imparem P metiretur O, adeoque O eſſet pariter impar: contra hypotheſim. Semiſſis ergo ipſius P eſto R. Hic rurſum erit par; ſi enim. R eſſet impar, cum ſit quarta pars ipſius O, numerus

1	A	B	C	D	E	F	
1.	2.	4	8.	16.	32.	64.	
				1	R	P	O.

rus 4. per imparem R metiretur D: rursus contra hypothesim. Atque ita semper semissis prioris erit par, donec veniatur ad 1. Sit ergo 1 semissis ipsius R. Erunt igitur R, P, O ab unitate dupli, ac proinde O unus ex serie. Liquet ergo propositum.

PROPOSITIO XXXIII.

SI omnes numeri impares duplentur, provenient omnes pariter impares tantùm 6. 10. *&c.*

3.	5.	7.	9.	11.
6.	10.	14.	18.	22.
A	B	C	D	E
			7 N	2.
			P	Q

Singuli pariter impares sunt, quia eorum semissis est *a* impar, adeoque metietur binarius singulos per semissem imparem.

a hyp.

Esse pariter impares tantùm, sic ostendo, Sumatur quilibet ex illis, puta D, cujus semissis esto N, & apponatur binarius. Si Ergo D est etiam pariter par, metiatur *b* eum P par per parem Q. Quoniam igitur N per 2 metitur eumdem D, erit *c* Q ad N, ut 2. ad P. Sed 2 metitur P parem. Ergo etiam Q par metitur imparem N: quod est absurdum contra XXI, lib. IX.

b def. 18.

c corol. 1. 19. 7.

Quod nullus præter hos sit pariter impar tantùm, sic ostendo. Si quis præter hos esset alius, is deberet *d* esse par. Pares autem numeri aut habent partes dimidias, ac proinde sunt ab unitate dupli, adeoque per præcedentem sunt pariter pares tantùm; aut habent dimidios impares, & sic per sequentem sunt pariter pares, & pariter impares. Ergo, &c.

d coroll. 22. 9.

PRO-

PROPOSITIO XXXIV.

PAres numeri A, B, C, D, E, qui nec a binario dupli sunt, nec dimidium habent imparem, sunt pariter pares, & pariter impares. Et præter hos alius nullus.

Singuli pariter pares sunt,

12.	20.	24.	28.	36.	40.	44.	48.
A	B	C	D	E	F	G	H

quia, cum eorum dimidii pares sint, binarius eos per illos dimidios pares metitur. Ergo per definitionem XVIII.

Quod etiam pariter impares sint, sic ostendo. Sumatur quilibet ex illis B, quem si dividas bifariam, & dimidium rursus bifariam, ac sic deinceps, tandem incides in aliquem imparem, si enim incideremus semper in pares, incideremus tandem in 2, ac proinde B esset ab unitate duplus: contra hypothesim. Impar autem ille metietur parem B per *a* parem. Ergo B pariter impar est. *a* coroll. 1. 29. 9.

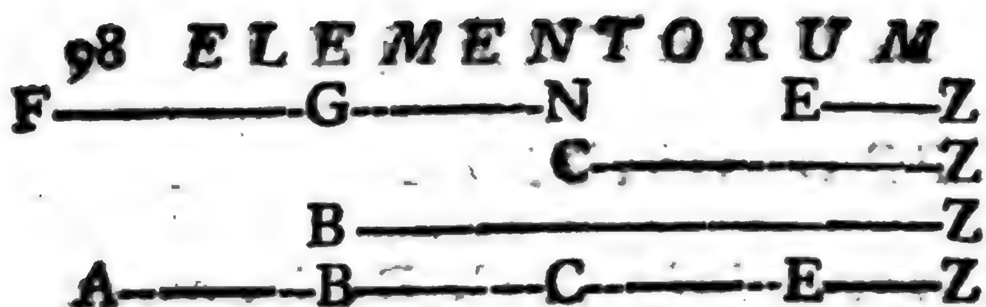
Atque ex his patet III. pars præcedentis.

Quod præter hos alii nulli sint pariter pares, & pariter impares, patet ex duabus præcedentibus propositionibus.

PROPOSITIO XXXV.

SI fuerint quantitates continuè proportionales quotcumque EZ, CZ, BZ, AZ; erit ut CE excessus secundæ CZ supra primam, sive minimam EZ ad minimam EZ, ita excessus AE maximæ AZ supra minimam, ad omnes simul reliquas BZ, CZ, EZ.

G F—G



Transferantur EZ, CZ, BZ in maximam AZ. Quoniam AZ est ad BZ, ut BZ ad CZ, & CZ ad EZ, erit *a* dividendo AB ad BZ, ut BC ad CZ, & CE ad EZ. Quare, *b* ut una AB ad unam BZ, sive, ut CE ad EZ, ita simul omnes AB, BC, CE, hoc est AE, ad omnes simul BZ, CZ, EZ. *Q. D. E.*

a 17. 5.
b 12. 5.

Ex hac præpositione, cujus fœcunditatem non videntur priores Arithmetici observasse, sequentia deducemus

Corollaria.

I. Si fuerint quotcumque numeri continuè proportionales EZ, CZ, BZ, AZ; erit, ut denominator proportionis, unitate mulctatus ad unitatem, ita minimi, & maximi termini differentia AE ad summam omnium, dempto maximo AZ.

Denominatorem referat FN, unitatem verò GN, Igitur, ut FN est ad GN, ita CZ est ad EZ: & dividendo, ut FG (denominator scilicet unitate mulctatus) est ad CN unitatem; ita CE est ad EZ, hoc est, per hanc propositionem, ita est AE ad omnes simul BZ, CZ, EZ.

II. Iisdem positis, dato denominatore FN, & maximi, ac minimi termini differentiâ AE, habetur summa omnium, dempto maximo, si AE maximi, & minimi differentia dividatur

per

per denominatorem unitate mulctatum FG.

Cum enim ſit *c*, ut FG ad GN unitatem, ita AE ad omnium ſummam, dempto AZ, ea exhibebitur, ſi quartus proportionalis inveniatur; is verò obtinetur, ſi *d* terminus ſecundus, nempe unitas, ducatur in AE tertium, & productus, qui manet ipſe AE, dividatur per primum FG.

c coroll. 1. præc.

d 19. 9.

III. Quod ſi termini proportionalis fuerint magnitudinis, habebitur ſumma omnium, demptâ maximâ, ſi fiat, ut CE duarum collateralium differentia ad minorem EZ, ita AE maximæ, & minimæ differentia ad aliam. Patet ex ipſa propoſitione.

IV. Si data ſeries proportionalium, ſeù numerorum, ſeù magnitudinum ſit proportionis duplæ, habetur omnium ſumma, demptâ maximâ, ſi minima auferatur à maximâ.

Per hanc enim XXXV, ut CE eſt ad EZ; ita AE eſt ad omnes BZ, CZ, EZ. Atqui hìc CE par eſt EZ. Ergo etiam AE par eſt omnibus BZ, CZ, EZ.

V. Iiſdem poſitis, ut AB, differentia duorum maximorum terminorum AZ, BZ, eſt ad maximum; ita AE maximus, dempto minimo, eſt ad omnium ſummam, dempto minimo.

Oſtenſum eſt enim in propoſitione, ut AB eſt ad BZ, ita AE eſſe ad omnes BZ, CZ, EZ. Ergo, ut AB eſt ad AZ, ita AE eſt ad omnes AE, BZ, CZ, EZ, hoc eſt ad omnes, demptâ minimâ EZ.

Scholium.

QUi hanc propositionem, ejusque corollaria contulerit cum iis, quæ scr psi ad propositionem XI. l. VI. facilè intelliget, hinc deduci posse totam contemplationem illam, qua seriei infinitarum proportionalium quantitatum una exhibetur omnibus æqualis. Nam cum finitus est proportionalium numerus, tum,
f per hanc 35. ut f CE est ad EZ, seù, ut AB ad BZ, ita AE, hoc est maxima, demptâ minimâ seù ultima, est ad omnes BZ, CZ, EZ. Cum verò numerus proportionalium infinitus est, tunc, ut AB est ad BZ, ita maxima tota AZ est ad omnes BZ, CZ, EZ, &c. Ubi hoc solum interest, quod tertio loco maxima jam accipiatur tota, quia nimirum minima, quæ prius à maximâ auferebatur, jam nulla sit; ac proinde auferri nequeat.

Rursus, cum finitus est numerus proportionalium, ut AB g est ad AZ maximam, ita
g cor. 9. præc. AE, hoc est maxima, demptâ minimâ, est ad omnes AE, BZ, CZ, EZ, hoc est ad omnes, demptâ minimâ. At verò cum infinitus est proportionalium numerus, tum, ut AB est ad maximam AZ, ita maxima AZ est ad omnes AZ, BZ, CZ, EZ. Ubi rursum hæc una differentia est, quod minima jam evanescat, ac nulla sit, adeoque auferri nequeat.

PROPOSITIO XXXVI.

SI numerorum series in ratione duplâ ab unitate continuè proportionalium A, B, C, D continuetur, donec eorum summa E sit primus numerus; summa E in maximum D multiplicata faciet numerum perfectum. Quod

Digitized by Google

1	A	B	C	D
E	O	N	P	F
		M	Q	

Quot sunt numeri A, B, C, D, tot sumantur ab E dupli, nimirum E, O, N, P. Ex æquo *a* igitur est, ut A ad D, sic B ad P. Quare ex A in P idem *b* fiet numerus, qui ex D in E, nempe F. Ergo P metitur F per A binarium, ac proinde E, O, N, P, F sunt continuè proportionales in ratione duplâ. Ergo F minus E, æquatur *c* ipsis E, O, N, P. Sed E æqualis est *d* ipsis 1, A, B, C, D. Ergo F minus E ipsis 1, A, B, C, D, & O, N, P æqualis est. Adde utrisque E, erit F omnibus 1, A, B, C, D, E, O, N, P æqualis. Sunt autem dicti numeri partes aliquotæ ipsius F; nam, cum E, O, N, P, F sint continuè proportionales, singuli metiuntur *e* F. Ob eamdem causam singuli 1, A, B, C metiuntur D, D autem metitur F, nam D *f* in E fecit F. Ergo & singuli 1, A, B, C, D *g* metiuntur F.

a 22. 5.
b 19. 7.
c coroll. 4. præc.
d hyp.
e 11. 9.
f hyp.
g ax. 11.

Reliquum est, ut ostendatur, numeri F nullam esse aliam partem aliquotam. Esto M quævis aliquota ipsius F. Ostendam, eam esse eamdem cum aliquâ ipsarum A, B, C, D, E, O, N, P eo ipso, quo id negatur. Ponatur enim, M non esse eamdem cum ullâ ipsarum A, B, &c. Quoniam igitur M metitur F, metiatur per Q. Ergo M in Q *h* facit F. Sed etiam E in D fecit F. Ergo est, ut E ad Q, sic M ad D. Sed quia B unitati proximus est primus, *i* utpote 2, & M ponitur esse diversus ab omnibus A, B, C, non metitur *k* M ipsum D. Ergo neque E metietur Q. Quare, *l* cum B primus sit, erunt

1	A	B	C	D
E	O	N	P	F
		M	Q	

h ax. 8.
i hyp.
k 13. 9.
l hyp.

m 31. 7. E, Q m primi inter se, ideoque in n ratione
n 23. 7. suâ minimi. Ergo E metitur M, & Q o meti-
o 21. 7. tur D. Ergo, cum A primus sit, Q est aliquis
p 13. 9. p ipsorum A, B, C. Sit ergo Q idem cum B, & quot sunt B, C, D, tot sumantur ab E dupli E, O, N. Igitur ex æquo, ut B est ad D, sic E est ad N. Idem ergo fit ex B in N, qui fit ex D in E, nempe F. Sed, quia M metitur F per Q, etiam Q in M facit F: quare, cum idem F fiat ex Q in M, & ex B in N, erit, ut Q ad B, ita N ad M. Sed ostendi Q esse idem cum B. Ergo N est idem cum M.

Nullas igitur F partes aliquotas habet, præter 1, A, B, C, D, E, O, N, P, quibus omnibus cum F sit æqualis, perfectus est. *Q. E. D.*

Quemadmodum in XII. propositione hujus libri, ita & in hac ex contradictoriâ suâ directe assertio concluditur. Quod miror à Clavio, aliisque non fuisse observatum.

Scholium.

EX hoc Theoremate invenientur omnes numeri perfecti. Quia summa ex 1, 2, est 3. numerus primus, 3 in ultimum 2 facit 6 primum perfectum, cujus partes aliquotæ sunt 1, 2, 3. Et quia summa ex 1, 2, 4 est 7 primus numerus, 7 in maximum 4 facit 28 secundum perfectum, cujus partes aliquotæ sunt 1, 2, 4, 7, 14. Rursum, quia summa ex 1, 2, 4, 8, 16, est 31 primus, 31 in 16 facit 496 perfectum tertium, cujus aliquotæ partes sunt 1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124, 248.

Summa habetur facillimè, si numerus sequens mulctetur unitate, ut patet ex corollario IV.

IV. præcedente. Partes aliquotas cujusvis perfecti sic invenies. Quot numeri accepti sunt ab unitate dupli, seclusa unitate, totidem a primo, sive summâ accipiantur dupli annumerato primo. Hi dupli cum duplis ab unitate, atque ipsâ unitate, sunt partes aliquotæ perfecti dati.

Porro inventio perfectorum ex hác propositione, & corollario IV. præcedente brevissime exponitur hunc in modum. Ratio dupla ab unitate continuetur in infinitum. Vide qui numeri progressionis, abjectâ unitate, fiant primi: hi namque ducti in præcedentes dabunt perfectos.

De multitudine perfectorum hactenus inventorum Marinus Mersennus in Præf. num. IX. hæc scribit, hactenus inventos esse tantum 11: *nimirum*, 6. 28. 496. 8128. 23 (550, 336. 8, 589 (869, 056. 137, 438 (691, 328. 2 (385, 843 (008, 139 (952, 128, *& tres alios, quorum postremus sit ex progressionis duplæ termino 257mo unitate mulctato in terminum 256um: ex illis* 28, *quos Petrus Bungus cap. XXVIII. de mysteriis num. recenset, tantùm* 8 *primos esse perfectos, eos videlicet, quos supra dedimus, reliquos* 20 *imperfectos. Hæc ille.* Tome I. Physico-Mathem.

Quod autem plures hactenus non sint reperti, inde fit, quod in serie progressionis duplæ intervalla numerorum, qui abjectâ unitate primi fiant, valde magna sint, undecimus enim ejusmodi est terminus ab unitate, ut dictum supra, 257us exclusivè, ac proinde numerus ingens, qui primus an sit, longissimi laboris est discernere. Sane, si 20 *notis constet numerus, Mersennus asserit, huic examini ne integrum quidem sæculum sufficere, quocunque modo hactenus cogrito utaris.*

ARITHMETICÆ PRACTICÆ

LIBER PRIMUS.

Quid potissimum hoc in opere spectaverim, initio præfatus sum: nimirum, ut Arithmeticæ Praxim universam, & clarè, breviterque exponerem, & (quod nullus huc usque fecit) demonstrarem. Quia porro, quod in tribus Elementorum libris compendio, ut opinor, non spernendo jam feci, Logisticæ Speciosæ rudimentis primis non semel utar etiam hic, revocanda in memoriam erunt ea, quæ habentur ante Elementorum librum, nobis primum, Euclidi septimum, quibus hoc jam accedet unum, quod fractiones etiam speciosas subinde adhibebimus. Nihil est tamen, quod difficultatem hìc aliquam sibi quispiam imaginetur, cum operationes earum à communium fractionum operationibus in nullo differant.

In citandis elementorum Arithmeticorum libris Euclidis ordinem retinui. Quare cum citatur septimus, adeundus est primus noster hìc, & sic de duobus reliquis. Primus numerus propositionem, secundus librum designat.

LOGIS-

LOGISTICA

Integrorum Numerorum.

IN omni numero, pluribus notis conſtante, ea nota, quæ maximè dextra eſt, prima dicetur, ultima verò, quæ maximè ſiniſtra.

CAPUT I.

Notarum Arithmeticarum Inſtitutio.

DEcem notæ, ſeu characteres ſunt, (alii digitos, alii figuras appellant,) quibus omnes numeri exprimuntur.

0. 9. 8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1.

Prima nota 1. unitatem ſignificat, 2. ſignificat unitates duas, 3. unitates tres, 4. unitates quatuor, & ſic deinceps.

Poſtrema 0, quæ cifra dicitur, nihil ſignificat, ſed aliis notis præpoſita, earum auget valorem, ut mox dicemus.

Præter hunc valorem ſimplicem notæ jam dictum, alium inſuper habent ratione loci, quem ſingulæ occupant. Porro locorum valor creſcit ſecundum proportionem decuplam, in infinitum continuatam. Itaque nota quælibet, primo loco poſita, ſignificat, ut dictum eſt, unitates, poſita ſecundo loco, ſignificat tot decades, quot habet unitates, tertio loco, tot centenas, quarto loco, tot millia, quinto loco, tot dena

dena millia, ſexto, tot centena millia, ſeptimo, tot mille millia, ſeu decies centena millia, ſeu milliones, quot unitates habet, atque ita deinceps ſequentium locorum valor in proportione decuplâ in infinitum procedit.

Eſto numerus A: prima hujus nota 6 ſignificat ſex unitates, ſecunda 9, valet novem decades unitatum, hoc eſt, 90, nonaginta, tertia 7 valet ſeptem centenas, hoc eſt, 700, ſeptingenta, quarta 5 valet quinque millia, 5000, quinta 3 valet tres decades millium, ſeu ter dena millia, hoc eſt, 30000, triginta millia, ſexta 8 valet octo centenas millium, hoc eſt, 800000, octingenta millia, ſeptima 1 valet unum millionem, ſeu mille millia, ſeu decies centena millia 1000000, octava 4 valet quadraginta milliones 40000000.

A. 4 1 8 3 5 7 9 6.

9 0.	Nonaginta.
7 0 0.	Septingenta.
5 0 0 0.	Quinque millia.
3 0 0 0 0.	Triginta millia.
8 0 0 0 0 0.	Octingenta millia.
1 0 0 0 0 0 0.	Mille mill., ſeu millio.
4 0 0 0 0 0 0 0.	Quadraginta million.
1	Unitas.
10	Decem.
100	Centum.
1000	Mille.
10000	Decem millia.
100000	Centum millia.

LO-

LOCUS.	VALOR.
Primus	Unitates
Secundus	Decades
Tertius	Centenæ
Quartus	Millia
Quintus	Decades millium
Sextus	Centenæ millium
Septimus	Milliones
Octavus	Decades millionum
Nonus	Centenæ millionum
Decimus	Millia millionum
Undecimus	Decades millium millionum
Duodecimus	Centenæ millium millionum
13us	Milliones millionum, five biliones
14us	Decades bilionum
15us	Centenæ bilionum
16us	Millia bilionum
17us	Decades millium bilionum.
18us	Centenæ millium bilionum
19us	Milliones bilionum, five triliones
20us	Decades trilionum
21us	Centenæ trilionum
22us	Millia trilionum
23us	Decades millium trilionum
24us	Centenæ millium trilionum
25us	Milliones trilionum, five quatriliones
Etc.	Etc.

Por-

Digitized by Google

Porro ſingulorum locorum valor tabellâ hic appoſitâ exhibetur, quam viſum eſt commodiſſimum ita partiri, ut ſingula quaſi membra locorum ſenarii ſinguli conſtituerent. In ſecundo igitur ſenario, ſeu membro ſunt milliones, in tertio biliones, in quarto triliones, in quinto quatriliones, atque ita in infinitum. *Valor enim cujuſvis membri, ſeu ſenarii, a numero membrorum, ſeu ſenariorum præcedentium denominabitur*. Ut ſi quæris valorem ſenarii ſeptimi, is erit ſextilio, quia ſeptimum ſenarium ſex ſenarii præcedunt.

Si magis placet valorem membrorum per ſolos milliones exprimere, toties itera vocem *millio*, quot ſunt membra præcedentia. Ut ſi quæratur, quis ſit valor in quarto ſenario, oportet tertio dicere millio, quia quartum ſenarium tres ſenarii, ſeu membra antecedunt. Itaque valor quarti ſenarii eſt millio millionis millionis.

CAPUT II.

Numeratio.

DOcet Numeratio datum numerum ſcribere, & enuntiare. Utrumque facili negotio perficiet is, qui notarum numeratum valorem, tum ſimplicem, cùm loci potiſſimum, primo Capite explicatum, rectè perceperit. Sed,qnia in magnis numeris proclive eſt, ut hæreant etiam Periti, variæ praxes huic rei facilitandæ ſunt excogitatæ. Nos hìc eam dabimus, quæ viſa eſt inter cæteras expeditior.

Ante

Ante omnia dabit operam Tyro Arithmeticus, ut expeditè ſcribat, ac enuntiet primi ſenarii locos, hoc eſt numeros conſtantes notis, vel ſex, vel quinque, vel quatuor, &c.

In quo juvabitur hac praxi. Pronuntiandi dentur numeri A, B, C. Poſt tres primas notas comma interpone, ut duo quaſi membra exiſtant, ſive ſecundum tribus conſtet notis, ſive paucioribus. Pronuntia deinde ſecundum membrum, tanquam ſi eſſet ſolum, ſed adde ſemel hanc vocem *mille*, vel *millia*; primum verò membrum pronuntia, ut jacet. Datos igitur numeros A, B, C ita enunciabis.

370, 517. A
49, 304. B
7, 059. C

A. Trecenta ſeptuaginta millia, quingenta decem, & ſeptem.

B. Quadraginta novem millia, trecenta, & quatuor.

C. Septem millia, quinquaginta novem.

Hoc præmiſſo, numerus enuntiandus eſto quantumvis magnus.

D.

96, 638 (908, 003 (030, 460 (243, 709.

Poſt ſex quaſque notas, a dextris incipiendo, lunulâ, aut virgulâ intetpoſitâ, numerum partire in quædam quaſi membra, quorum ſingula ſenis conſtabunt notis, dempto ultimo, quod conſtare poteſt paucioribus, imo unicâ. Tum ſingula membra, à ſiniſtris incipien-

piendo, pronuncia, ut jam docui, ac si essent sola, sed adjunge singulis valorem ipsis competentem, quem subjecta tabella indicat.

MEMB.	VALOR	MEMB.	VALOR
Primum		Septimum	Sextilio
Secundum	Millio	Octavum	Septilio
Tertium	Bilio	Nonum	Octilio
Quartum	Trilio	Etc.	Etc.
Quintum	Quatrilio		
Sextum	Quintilio		

Numerus igitur D sic pronuntiabitur.

Membr. IV.

Nonaginta sex millia, sexcenti triginta octo triliones.

Membr. III.

Nongenta octo millia, & tres biliones.

Membr. II.

Triginta millia, quadringenti sexaginta milliones.

Membr. I.

Ducenta quadraginta tria millia, septingenta novem.

Cum numerus multas ad dextram, & non interruptas habet cifras, brevior est pronuntiatio. Ut si detur Numerus E.

E.

E.

1 (000000(000000(000000(000000
(000000(000000.

(major is eſt numero arenarum, orbem Terræ componentium.) Quoniam is ultimum, hoc eſt ſeptimum membrum conſtans unitate, ſolum habet ſignificativum, eum totum pronuntiaveris, dicendo, *unus ſextilio*.

Quod ſi miſſis bilionum, ac trilionum vocibus, malis per ſolos milliones enuntiare; eâdem partitione factâ, quæ ſupra, pronuntia membra ſingula, ac ſi eſſent ſola, toties adjunctâ voce *millio*, quot membrum enuntiandum alia membra antecedunt. Itaque numerus D per milliones ſic pronuntiabitur.

Membr. IV.

96, 638 Milliones millionum millionum

Membr. III.

908, 003 Milliones millionum.

Membr. II.

030, 460. Milliones.

Membr. I.

243, 709.

Nu-

Digitized by Google

Numerus vero E pronuntiabitur hunc in modum: unus millio millionum millionum millionum millionum millionum. Prior modus brevior, & expeditior eſt, alter uſitatior.

Omnium facillima, at cæteris longior eſt enuntiatio per ſola millia. Poſt ſingulas ternas notas, initio facto a dextris, interpone commatum membra ſingula, incipiendo a ſiniſtris, ita pronuntia, ac ſi eſſent ſola, ſed toties adjunge hanc vocem *mille*, vel *millies*, quot membrum enuntiandum alia membra antecedunt. Datus ſit numerus F enuntiandus per millia. Membrum ultimum eſt *96ies* millies millies millena millia: penultimum, *630ies* millies millena millia.

F 96, 630, 000, 000, 000.

Ratio horum omnium ex Capite primo eſt manifeſta.

Scriptio dati numeri nullo negotio perficitur, ſubſidio tabellæ Capitis præcedentis. Scribendus eſto hic numerus, *quadraginta quinque milliones, ſeptem millia*.

In tabellâ reperies, decades millionum obtinere locum octavum, milliones ſeptimum, millia quartum. Scribe igitur 4 loco octavo, 5 ſeptimo, 7 quarto, & loca vacua cifris reple.

45 (007, 000.

CA-

CAPUT III.

Porifmata quædam, ex quibus pendent rationes operationum logiſticarum.

PORISMA I.

SI numero A pluribus notis conſtanti præponatur una nota, illius valor augetur in decuplum; ſi duæ in centuplum; ſi tres in millecuplum, & ſic deinceps, ſemper in proportione decuplâ.

		243	0
A	243	243	00
		243	000

Demonſtratio. Cum enim toti numero A præponitur una nota, (cifræ quaslibet hìc notas repræſentant) ſingulæ ejus notæ ad unum locum promoventur, ſic, ut 3 jam ſecundo conſiſtat loco, 4 tertio, 2 quarto, ac proinde ſingularum valor augetur in decuplum, ut patet ex primâ notarum Arithmeticarum inſtitutione, capite primo expoſitâ. Ergo valor totius numeri A augetur in decuplum. Similiter cum numero A duæ notæ præponuntur, aſcendunt ſingulæ ad duo loca. Ergo valor ſingularum, ac proinde etiam numeri totius A, augetur in centuplum. Et ſic deinceps.

Corollarium. Hinc patet, ſi ante duos numeros *a*, & *b* ponantur æquè multæ cifræ, ut fiant *c*, & *d*, fore *c*, & *d* ipſorum *a*, & *b* æquè

a 32.	3200.	*c*
b 7.	700.	*d*

b æquè multiplices. Si enim præponatur singulis una cyfra, erunt pariter *c*, & *d* ipsorum *a*, & *b* decupli, si duæ cyfræ, ambo centupli, & sic deinceps.

PORISMA II.

1000 A
999 B

DUorum numerorum ille major est, qui pluribus notis constat.

Patet ex primâ institutione notarum. Sic A major est, quàm B.

PORISMA III.

C. 2000
D. 1999.

NUmerorum, æquè multis notis constantium ille major est, cujus postrema nota major est.

Sic C major est, quàm D. Patet ex institutione primâ notarum numeralium.

PORISMA IV.

A 2999
B 2000
E 2000 | 0

SI duo inæquales numeri A, B æquè multis notis constent, continebitur minor in majore minus, quàm decies.

Demonstratio.

Adjiciatur enim minori B una cifra, & fiat E. Per Porisma II. E major est, quàm A. Sed

A. Sed E præcisè decuplus est dati minoris B, per Porisma I. Ergo A non est decuplus dati B. *Q. E. D.*

PORISMA V.

A 2999
B 300
E 300 | 0

Dati sint numeri, A major, B minor, & major A superet minorem B unâ notâ; sed minoris B nota ultima, 3, sit major notâ ultimâ majoris A. Dico minorem B in majori A contineri minus, quàm decies.

Demonstratio. Adjiciatur enim minori B una cifra, & fiat E. Per Porisma III. E major erit, quàm A. Sed E præcisè decuplus est dati minoris B, per Porisma I. Ergo A minor est, quàm decuplus ipsius B. *Q. E. D.*

PORISMA VI.

Dati sint duo numeri A, & B. Si prima unius nota, c, multiplicet aliquam numeri alterius notam d, prima altiorem, sed acceptum simpliciter, & productum e ad locum notæ d attollatur, tot videlicet notis ante ipsum positis, quot sunt ante d, ut fiat f. Dico f esse verum productum, quod fit ex nota c, multiplicante notam d, secundum loci valorem æstimatam.

d	
3, 042.	A
c	
517	B
e. 21	
f. 21. 000	

Demonstratio. Nota *d* secun- *d* 3 3,000, g dum

dum loci valorem æstimata, esto c 7
g. Tum c multiplicans g faciat z. e 21 z——
Ostendendum est f esse z. Quoniam c multiplicans numeros d, & g genuit numeros e, & z; per XVII. lib. VII, ut d est ad g, ita e est ad z. Atqui etiam, ut d ad g, ita e est ad f. Cum enim g, & f sint ipsi numeri d, & e, sed æqualiter sublimati, hoc est æquè multas ante se notas per hypothesim habentes; patet ex Porismatis I. corollario g, & f ipsarum a, & e esse æquè multiplices. Ergo e ad z, & ad f eamdem habet proportionem. Ergo per IX. lib. V. z, & f sunt æquales. *Q. E. D.*

f 21, 000

PORISMA VII.

Dati rursum sint duo numeri A, & B. Si duæ quælibet utriusque numeri notæ k, & d invicem multiplicentur, simpliciter acceptæ, & productum c attollatur ad locum, ex notarum multiplicantium locis compositum, tot videlicet notis ante c positis, quot utramque k, & d antecedunt; dico haberi in f productum verum, quod fit ex notis k, & d juxta loci valorem æstimatis.

d
3, 402. A
k
5, 15. B
————
c. 15, m, 15, 000
f, 15, 000, 00

k, 5 5, 00. h
g. 3, 000
c c
m. 15, 000. 15, 000, 00, f
z————

De-

Demonstratio. Notæ *k*, & *d* secundum loci valorem æstimatæ sint *h*, & *g*. Tum *h* in *g* fit *z*. Ostendendum est *f* esse *z*. Ante *c* productum ex *k* in *d* ponantur tot notæ, quot antecedunt notam *d*, & fiat *m*. Erit per Porisma præcedens *m* productum ex *k* in notam *d*, ex loco æstimatam, hoc est ex *k* in *g*. Deinde quoniam per constructionem *m* est *c* cum tot notis ante se, quot sunt in numero A ante *d*; *f* vero per hypothesim est idem *c*, sed cum tot notis ante se, quot in numeris A, & B antecedunt utramque *d*, & *k*; manifestum est notas, quæ in *f* ponuntur ante *c*, excedere eas, quæ in *m* sunt ante *c*, tot notis, quot sunt in B ante *k*, hoc est tot notis, quot sunt in *h* ante *k*, cum *h* sit ipsum *k*, ex loco æstimatum. Ergo per corollarium Porismatis I. *h*, & *f* sunt ipsorum *k*, & *m* æquè multiplices, ac proinde, ut *k* est ad *h*, sic *m* est ad *f*. Atqui etiam per XVIII. l. VII., ut *k* est ad *h*, ita *m* est ad *z*; nam, ut ostendi supra, *k* multiplicans *g* produxit *m*, & per hypothesim *h* multiplicans *g* genuit *z*. Ergo *m* eodem modo se habet ad *f*, & ad *z*. Ergo per IX. lib. V. *f*, & *z* æquales sunt. *Q. E. D.*

Ex hoc porismate, & præcedenti multiplicatio demonstrabitur Capite VII.

PORISMA VIII.

Dati sint duo numeri AB,	360,	5897	{ 60. C
	A,	B	{ 6. d
& C: si C divi-			6, 0000 f

dat membrum A simpliciter acceptum, & quotiens d *attollatur*

 ad

ad locum membri A, hoc eſt ponantur ante d *tot notæ, quot ſunt ante membrum A, ut fiat* f. *Dico* f *eſſe quotientem verum, qui habetur ex membro A, æſtimato ſecundum loci valorem, diviſo per C.*

Demonſtratio. Membrum A, juxta loci valorem æſtimatum, eſto *g*. Tum C, dividens *g*, faciat quotientem z. Oſtendendum eſt *f* eſſe z. Quoniam C, dividens numeros A, & *g*, genuit quotientes *d*, & z; erit per coroll. p. XVIII. lib. VII. ut A ad *g*, ita *d* ad z. Atqui etiam eſt, ut A ad *g*, ita *d* ad *f*. Cum enim *g*, & *f* ſint ipſi numeri A, & *d* ad æqualem locum ſublimati, hoc eſt, æquè multas per hypotheſim notas ante ſe habentes; patet ex corollario poriſmatis I. *g*, & *f* ipſorum A, & *d* eſſe æquè multiplices. Ergo *d* eodem modo ſe habet ad *f*, & ad z. Ergo per IX. lib. V. *f* eſt z. *Q. E. D.*

A	g
360	360, 0000
C	
60	
d. 6.	6, 0000. f
	z————

Ex hoc poriſmate diviſio demonſtrabitur Capite IX.

PORISMA IX.

O*Perationum Logiſticarum, hoc eſt additionis, ſubtractionis, multiplicationis, & diviſionis artificium in eo poſitum eſt, quod tantiſper, dum operamur, loci valore neglecto, notæ accipiantur juxta valorem ſimplicem; ſic tamen, ut ſummæ in additione, reſidua in ſubtractione, producta in multiplicatione, quotien-*

tientes in divisione suis quæque reponantur locis: quo fit, ut valor singulis ex loco debitus restituatur.

PORISMA X.

NOta simplex, quemcumque numerum multiplicans, aut dividens, non nisi unicâ notâ, seu loco eum auget, minuitve.	A 365
	10
	3650

Detur numerus A quicumque. Hic multiplicatus per 10, non nisi uno gradu, seu loco attollitur, ut patet ex I. porismate. Ergo neque multiplicatus per notam simplicem attolletur altiùs gradu uno.

A 365		5
10	36	10

Rursum 10, dividens datum A, eum non deprimit infra gradum unum. Ergo neque nota simplex: quò enim divisor est minor, eò quotiens major est.

CAPUT IV.

Additio.

ADditio est plurium numerorum in unam summam collectio.

PRAXIS.

DAti sint numeri A, B, C in unam summam colligendi.

97063.	A
8002.	B
5041.	C
110106.	D

Ita scribantur, ut primæ notæ respondeant primis, hoc est

est unitates unitatibus, secundæ secundis, hoc est decades decadibus; tertiæ tertiis, hoc est centenæ centenis; & sic deinceps.

Subductâ deinde lineâ, notæ primi loci addantur, & si numerus ex his compositus unicâ notâ constet, ea primo loco infra lineam scribatur. Si vero duabus constet, sola earum prima infra lineam scribetur, altera reservabitur, sequenti loco reponenda. Si tribus, quod rariùs accidit, secunda ad secundum, tertia ad tertium locum pertinebit.

Post hæc addantur notæ secundi loci, una cum illâ, quæ fuerat reservata, numerusque ex his compositus scribatur infra lineam secundo loco, juxta cautionem jam traditam. Atque eumdem planè in modum locorum cæterorum additio peragetur.

Exemplo præcepta fient clariora.

Exemplum.

97063.	A
8002.	B
5041.	C
110106.	D

PRimi loci notæ 1, 2, 3 faciunt 6, quæ scribo infra lineam.

Notæ secundi loci 4, 0, 6 faciunt 10, qui numerus, quia duabus notis constat, primam 0 infra lineam scribo, secundam 1 servo tertio loco reponendam.

Loco tertio nullam reperio notam significativam. Notam igitur servatam 1 infra lineam scribo in loco tertio.

In quarto loco reperio 5, 8, 7, quæ simul efficiunt 20, qui numerus, quia binis constat notis,

notis, primam o ſcribo infra lineam quarto loco; ſecundam verò 2 ſervo ſequenti loco.

In loco quinto reperio 9, cui addo notam ſervatam 2, & fiunt 11, quæ, ut jacent, quinto, & ſexto loco ſubſcribo. Atque ita operatione totâ peractâ provenit numerus D, ſumma datorum A B, C.

97063.	A
8002.	B
5041.	C
110106.	D
9	
20	
o	
10	
6	
110100.	D

* *Additio poteſt etiam fieri a ſiniſtrâ in dextram; & hæc operatio, ſive a ſiniſtrâ, ſive a dextrâ incipiat, iiſdem principiis a demonſtratur, primaque operatio eſt proba ſecundæ, ſicut ſecunda primæ. Quod forſan pluribus novum apparebit.*

**Deſaiguliers Prof. Mathem. Aſtelod. Tract. de Scientiâ numerorum.* *a* ax. 2. 3. 4.

Si multi fuerit numerorum addendorum ordines, expediet lineis interpoſitis in tres, quatuorve eos claſſes dividere, & ex ſingulis claſſibus ſingulas ſummas colligere, quæ deinde ad unum redactæ, ſummam ſummarum exhibeant.

Demonſtratio.

Colligitur ex Poriſmate IX. cap. III. Quamvis enim in operatione notarum valor localis neglectus tantiſper fuerit, is tamen fuit reſtitutus, dum ſingulorum locorum ſummæ ſuis quæque locis fuere collocatæ, ut ex operatione ipſâ manifeſtum eſt.

SPE-

Digitized by Google

SPECIES DIVERSÆ.

Libr.	Flo.	Aſs.
8	7	5
5	3	6
2	8	9
3	2	8
21.	3.	8.

SI addendæ ſint ſpecies diverſæ, ut libræ, floreni, aſſes, ſimilia ſub ſimilibus ſcribe, & minimam ſpeciem, nempe aſſes, primo loco, tum ordine reliquas. Deinde a minimæ ſpeciei ſummâ, quæ hic eſt aſſium 28, abiice ſpeciem ſequentem, nempe florenum quoties potes, & reſiduum ſcribe infra lineam ſub aſſibus: quod vero abjectum fuit, hic nempe florenus 1, ſervetur addendum ſpeciei ſequenti, nempe florenis.

Proxima ſpecies in unum collecta facit florenos 20, quibus ſi addamus unum a priori ſpecie abjectum, fiunt floreni 21. Ab his abiici poſſunt tres libræ, quas addo ſpeciei ſequenti, libris videlicet, & reſiduos florenos 3. florenis ſubſcribo.

Tertiæ ſpeciei ſumma eſt librarum 18, quibus adde 3 ex priori ſpecie abjectas, & fiunt libræ 21, quas libris ſubſcribe. Ergo ſumma eſt lib. 21, flor. 3, aſs. 8.

Eâdem methodo addi poſſunt gradus, minuta prima, ſecunda, tertia, &c.

CAPUT V.

Subtractio

DOcet minorem numerum a majori ſubtrahere, & reſiduum exhibere. Duplex vero

vero eſt modus, quo minor numerus a majori ſubtrahitur.

PRAXIS MODI I.

Minor numerus ſcribatur ſub majore ſic, ut primæ notæ primis, ſecundæ ſecundis, & ſic deinceps reſpondeant.

Subductâ deinde lineâ, primam inferiorem notam aufer a primâ ſuperiore, & reſiduum ſcribe infra lineam primo loco; tum ſecundam aufer ex ſecundâ, & reſiduum ſubſcribe ſecundo loco; & ſic deinceps.

Quod ſi in ſuperiori numero reſtent aliquæ notæ, quibus nullæ reſpondeant numeri inferioris, etiam illæ infra lineam ſcribantur.

Si autem nota aliqua inferior ſit major ſuperiore, ad ſuperiorem mente adiicies decem. Tum verò proxima ad ſiniſtram nota ſignificativa ſuperioris numeri æſtimanda eſt minor unitate, quàm reverà ſit; & ſi intermediæ eſſent cifræ una, vel plures, omnes illæ ad notam ſignificativam uſque æſtimandæ erunt tamquam 9.

Exempla.

496.	A
75.	B
421.	C

I. ESto B auferendus ab A. Aufer 5 ex 6, reſtat 1, quod ſcribe infra lineam. Tum 7 aufer ex 9, reſtant 2, quæ ſubſcribe ſecundo loco. Supereſt in ſuperiori numero nota 4, cui nulla reſpondet in numero inferiore. Subſcribe igitur 4 loco tertio. Reſiduum quæſitum eſt C.

II.

Digitized by Google

II. Detur E auferendus ex D. Quia 8 ex 4 auferri nequit; ad 4 mente adjicio decem, atque ita 8 aufero ex 14, restant 6, quæ subscribo. Quia vero ad 4 adjeci decem mutuata a numero sequente, proximam notam significantem 3 reputabimus ut 2, & cifras intermedias, ut totidem 9. Aufero igitur 7 ex 9, & residuum 2 subscribo. Tum 5 aufero similiter ex 9, & residuum 4 subscribo. Tandem 2 aufero non ex 3, sed ex 2, & nihil restat. Reliquum igitur quæsitum est F.

3004.	D
2578.	E
426.	F

III. Oporteat H auferre ex G. Quia 9 ex 3 auferri nequit, adjectis mente 10 ad 3, subduco 9 ex 13, & residuum subscribo. Quapropter 5 fit 4, & 00 vertuntur in 9. Ergo 6 aufero ex 9, & residuum 3 subscribo. Tum, quia nullæ notæ inferioris numeri H supersunt auferendæ, reliquas superioris, quæ jam sunt, non 850, sed 849, subscribo. Erit I quæsitum residuum.

85003	G
69	H
84934	I

IV. Proponatur L auferendus ex K. Quia 3 nequit auferri ex o, adjectis mente 10 ad o, aufero 3 ex 10, & remanent 7. Tum verò, quia in majore numero K nota proxima significativa est 1, ea evanescit, & cifræ intermediæ vertuntur in 9, a quibus subtrahes, ut supra; & erit M residuum quæsitum.

100000.	K
51243.	L
48757.	M

Demon-

Demonstratio Modi I.

QUod in residuorum scriptione locorum valor servatus sit, ex operatione ipsâ patet. Solùm restat, ut declaremus id, quod mirum videri solet Tyronibus, quare nota significativa, ad sinistram proxima, minuatur unitate; & cifræ, si quæ fuerint mediæ, in totidem 9. commutentur, quando nota inferior demi nequit ex superiore. Inspiciatur secundum exemplum. Quia 8 demi nequit ex 4, ad 4 adjicio decem mutuata a sequente numero, qui est tria millia. Liquet autem, cum a tribus millibus subduco decem, remanere duo millia, nongenta, nonaginta, quæ quia Arithmeticè exprimuntur hisce notis 2990, patet, quare in superiori numero 3 vertatur in 2, & cifræ 00 in 99.

3004.	D
2578.	E
426.	F

D.	3004	96
E.	2578	91
F.	426	55

At dicet quispiam, si ante numeri D primam notam 4 ponerentur aliæ duæ 9, 6; & ante numeri E primam 8 duæ 9, 1; tunc 4 valeret 400, & 8 valeret 800; ac proinde ut 800 auferri possint ex 400, adjicienda essent non decem, sed mille, ut sic 800 ex 1400 subducantur. Verùm respondeo eòdem recidere, sive 8 auferas ex 14, sive 800 ex 1400, quia residuum 6 scribitur infra lineam eo loco, qui debetur notis 4, & 8, nempe tertio: unde fit, ut residuum 6 eo loco positum valeat 600,

quan-

quantum nempe superesset, si 800 ex 1400 subducerentur.

MODI II. PRAXIS.

HÆc in eo tantum a priore differt, quòd, quando nota inferior auferri nequit a superiore, ac proinde illi decem adjiciuntur; nullâ in superioribus notis sequentibus mutatione factâ, sequens inferior nota unitate augeatur; aut certè, si nulla nota significativa sequatur, in loco sequenti unitas reponatur. Res exemplo declarabitur.

Exemplum.

8068.	K
576.	L
7492.	M

DEtur L, auferendus ex K. 6 ex 8 relinquit 2. 7 ex 6 subduci nequit. Adjicio ergo 10, & 7 demo ex 16, restant 9. Jam, quia adjeci 10, sequens nota inferior 5 augenda est unitate, & sic 5 fit 6. Rursum 6 ex 0 auferri nequit. Aufero igitur 6 ex 10, & restant 4. Quia verò rursum adjeci 10, repono sequenti loco, qui vacat, unitatem, quæ ablata ex 8 relinquit 7. Residuum ergo quæsitum est M.

Hæc methodus expeditior plerumque est præcedenti; quæ tamen commodior erit, cum in majore numero plures occurrunt cifræ continuæ.

Demon-

Demonſtratio Modi II.

DEntur binæ quantitates AB major, CF minor, quæ ambæ

E——A——L——B
I——C——F

æqualibus quantitatibus EA, IC augeantur. Si IF auferas ex EB, idem erit reſiduum LB, quod fuiſſet, CF ablato ex AB. Hoc ſi numeris applicetur, operationis ratio continuò eluceſcet. Nam ſuperiori notæ 6 adjicere decem ſic, ut fiat 16, nihil eſt aliud, quàm ſequenti poſt illam loco, qui hic tertius eſt, apponere unitatem. Quare cum etiam loco, notam inferiorem 7 ſequenti, qui & ipſe tertius hic eſt, apponatur unitas; manifeſtum eſt, utrumque numerum æqualiter augeri, ac proinde reſiduum, hâc ratione obtentum, illud ipſum eſſe, quod numero L a numero K ſubducto remanet.

Subtractio a ſiniſtrâ in dextram etiam fieri poteſt, & iiſdem principiis demonſtrari, ut patet hoc exemplo.

59.	
8068.	K
576.	L
7492.	*M*

Detur L, auferendus ex K, 5 ex 80 relinquit 75, ex quibus 7 infra repono, & 5 retineo, vel potius ſupra ſcribo. Poſtea 7 ex 56 aufero, & reſtant 49. 5 ſi ſupra ſcriptum ſit, deleo; 4 infra ſcribo, & 9 retineo, vel ſupra ſcribo. Denique 6 ex 98 relinquit 92, qui cum ultimus ſit numerus, infra totaliter reponitur, & reſiduum quæſitum M oſtendit, ſicut in exemplo præcedenti. Plura alia videri poſſunt apud a ſupradictum Auctorem.

a Deſaig.

SPE-

SPECIES DIVERSÆ.

UT libræ, floreni, asses subducantur, minor summa subscribatur majori, sic ut similia similibus respondeant: & si simile a simili subtrahi nequeat, a specie majori proximâ unum mutuetur.

Lib.	Flor.	Asses.
25	12	13
10	14	18
14	3	15

Exemplum.

18 Asses, quia nequeunt auferri ex 13, a florenis 12 numero mutuò acceptum adjicio ad 13 asses, & fiunt 33. Jam 18 ex 33 ablati relinquunt 15. Rursum quia 14 floreni ex 11 (unum quippe sustulimus) demi nequeunt, ad florenos 11 addjicio 1 libram mutuatam a libris 25, & fiunt floreni 17, a quibus si subducantur 14, remanent 3. Postremò 10 libras subduco ex 24 (nam una mutuò data est), & restant 14 libræ.

Simili ratione subtrahentur gradus, minuta prima, secunda, &c.

CAPUT VI.

Tabula Pythagorica multiplicationi, divisionique inserviens.

ABacus, qui ab auctore Pythagoricus dicitur, in vertice seu supremo ordine AC habet novem primordiales notas Arithmeticas 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9: & sub singulis

gulis ponitur singulorum duplum, triplum, quadruplum, &c. usque ad noncuplum. Usus est eximius, tradeturque cap. VII, & IX.

Quod si hujus Abaci columnæ AB, DE, &c. ab invicem separentur, ut possint inter sese quovis ordine permisceri, multiplicationis, ac divisionis compendium admirabile exhibebitur. Hanc tabulæ Pythagoricæ dissectionem primus excogitavit, adhibuitque Johannes Nepperus Baro Merchistonius, tum hoc invento suo, tum logarithmis a se itidem excogitatis, de Mathesi præclarè meritus.

Porro hujus Abaci dissecti, sive mobilis constructio est hujusmodi. Præparentur ex ære, chartâ solida, aut aliâ quavis materiâ idoneâ laminæ plures oblongæ, & tenues AB, quæ dividantur in novem quadrata æqualia, & quadrata singula ductis diametris in duo triangula secentur sic, ut inferius triangulum BNP ad dextram sit. Primæ laminæ inscribatur prima columna tabulæ Pitgagoricæ, nempe 1, 2, 3, 4, &c.; & in altera ejus facie columna secunda 2, 4, 6, 8, &c. In secundâ laminâ describatur columna tertia tabulæ Pythagoricæ 3, 6, 9, 12, &c., in alterâ verò ejusdem facie columna quarta 4, 8, 12, 16, &c. Et sic deinceps in reliquis laminis Abaci Pythagorici reliquæ columnæ describantur, eâ semper lege, ut, cum numerus unicâ notâ constat, is reponatur in triangulo inferiori; cum verò duabus, exempli gra. 18, prima nota 8 inscribatur triangulo inferiori, secunda 1 triangulo superiori. Ex singulis autem hujusmodi laminis plures ejusdem formæ erunt construendæ. Sed uniuscujusque formæ ad maximas etiam

divisiones, ac multiplicationes peragendas sufficient. Præter has autem alia insuper præparanda est lamina XZ, quam hìc expressam vides. Ea reliquis ad sinistram in omni multiplicatione, ac divisione apponitur, singulos numerorum ordines denominans, quam proinde ab officio exponentem nominabo.

Harum laminarum primum istud, atque præcipuum artificium est, ex quo usus reliqui omnes emanant, quod datum numerum per novem primordiales notas momento penè multiplicatum exhibeat. Datus esto numerus 597. Laminæ hunc numerum gerentes in vertice sibi mutuò, apponantur, præfixâ ad lævam virgulâ exponente XZ. Stabit igitur in primo, sive supremo ordine numerus datus 597, atque infra ipsum alii numerorum ordines octo multiplices primi 597, juxta numeros laminæ exponentis, ut cap. VIII. demonstrabitur.

Modus legendi, & exscribendi ordines numericos laminarum.

TRia observa. I. Primum inferius triangulum, quod nempe ad dextram est, constituere primum locum; rhombos intermedios singulos, loca singula intermedia; postremum superius triangulum, locum ultimum. Ex quo statim apparet, quot notis constet numerus, quem ordo quilibet laminarum continet. II. Notas in eodem rhombo existentes, Exempl. gr. in NM., coalescere. Quod si coalescentes, hoc est in unum collectæ, numerum efficiant binis notis constantem, illius notam secundam ad sequentem rhombum, aut triangulum rejici oportere.

Exem-

Exemplum.

OPorteat ordinem nonum deſcribere. In primo triangulo inferiori reperio 3, quam ſcribo primo loco. In ſequenti rhombo notæ ſunt 6, & 1, quæ coaleſcentes faciunt 7: ſcribo ergo 7 ſecundo loco. In rhombo ſequenti notæ ſunt 8, & 5, quæ coaleſcentes faciunt 13: hujus ſummæ primam notam 3 ſcribo loco tertio; alteram 1 rejicio ad ſequens ultimum triangulum, ac ad notam iſthic repertam 4 adjicio, & fiunt 5, quam ſcribo loco quarto. Ordo igitur nonus continet numernm 5373.

Ratio hujus exſcriptionis dabitur in demonſtratione cap. VIII.

CAPUT VII.

Multiplicatio.

QUid ſit multiplicatio, expoſitum eſt defin. XIII. lib. VII., qui nobis eſt Arithmeticorum primus.

Ut expeditè fiat multiplicatio numerorum pluribus notis conſtantium, prænoſcenda eſt notarum ſimplicium multiplicatio, quæ præſidio tabulæ Pythagoricæ momento abſolvitur. Oporteat multiplicare 7 per 8. In latere AB quære 7; in latere AC 8: in concurſu offertur 56 productum ex 7 per 8

Digitized by Google

PRAXIS.

DEntur numeri A, B inter ſe multiplicandi. Si inæquali conſtant notarum numero, eum alteri ſubſcribe, qui paucioribus conſtat notis. Tum prima nota inferioris B multiplicet notas ſingulas ſuperioris A, & producta ſcribe infra lineam a dextrâ in ſiniſtram, eâ lege, ut ſi productum conſtet duabus notis, primam ſubſcribas, ſervatâ alterâ, quæ ſequenti producto addenda erit.

Pari modo reliquæ notæ inferioris B multiplicent ſingulas notas ſuperioris A; ſed producta ſic ſcribantur, ut producti ſecundi D prima nota eo loco reponatur, quem habet nota multiplicans 1, hoc eſt ſecundo; producti tertii E nota prima ſtatuatur eo loco, quem habet nota 5 multiplicans, hoc eſt tertio: & ſic deinceps.

Denique producta C, D, E collige in unam ſummam F. Hæc erit productum quæſitum ex multiplicatione numerorum A, B.

Exemplum.

3042	A
517	B
21294	G
3042-	D
15210--	E
1572714	F

DEntur multiplicandi inter ſe A, & B. Minoris B nota prima 7 multiplicet totum A. 7 in 2 facit 14: primam notam 4 ſcribo infra lineam; alteram, nempe 1, ſervo. 7 in 4 facit 28, quibus addo notam ſervatam 1, & fit 29: ſcribo 9 ſecundo loco in-

infra lineam, & servo 2. 7 in 0 facit 0. Ergo notam servatam 2 subscribo tertio loco solam. 7 in 3 facit 21; quæ subscribo quarto, & quinto loco, ut jacent.

3042	A
517	B
21294	C
3042-	D
15210--	E
1572714	F

Eodem prorsus modo numeri B nota secunda 1, multiplicans totum A, gignet productum D, cujus prima nota 2 scribatur secundo loco, nimirum infra ipsam suam notam multiplicantem, quæ est 1. Neque aliter numeri B nota tertia 5 multiplicans totum A, gignet productum E, cujus prima nota 0, scribatur loco tertio, nempe infra notam suam multiplicantem 5: cæteræ verò locis ordine suo consequentibus reponantur.

Demonstratio

Manifesta est ex Porism. VI. & VII. cap. III. Quod enim valorem sibi ex loco debitum habeant notæ omnes producti primi C, itemque nota prima producti D, & nota prima producti E patet ex Porism. VI. Quod verò reliquæ notæ productorum D, & E valorem quoque habeant ex loco sibi debitum, patet ex Porism. VII. Liquida sanè res erit, si operandi ratio jam præscripta cum Porismatis jam dictis conferatur.

Digitized by Google

Multiplicationis Compendia.

I. Cum utriusque numeri dati G, H, vel unius tantùm, primæ notæ sunt cifræ una, vel plures non interruptæ; multiplicatio peragetur inter notas significantes solas, & producto præponentur omnes cifræ utriusque numeri.

12000	G
400	H
4800000	K
23	G
5000	H
115000	K

II. Cum datorum unus M constat unitate, & cifris, habetur productum P, si alteri N adjiciantur omnes cifræ prioris M.

2340	N
1000	M
2340000	P

III. Si in numero multiplicante R una, pluresve cifræ mediæ, & continuæ occurrant, illis omissis, per notam sequentem 5 multiplicabis totum Q, & producti T notam primam 5 scribes infra notam suam multiplicantem, quæ etiam hic est 5, nimirum quarto loco.

8013	Q
5006	R
48078	S
40065	T
40113078	

Horum compendiorum demonstratio ex iisdem VI., & VII. Porif. manifesta similiter est.

SPECIES DIVERSÆ.

UT Libræ, Floreni, Asses, prius ad minimam speciem, puta asses, reducendæ; reductæ per regulas jam traditas multiplicentur; productum verò ad majorem, quæ placuerit, speciem ope divisionis, cap. IX. tradendæ, reducetur: ut si productum sint 3400 asses, dividendo 3400 per 20, reduces ad florenos 170: hos dividendo per 6, reduxeris ad libras 28, cum unâ tertiâ, hoc est ad Lib. 28. Flor. 2.

Eâdem methodo fiet multiplicatio Astronomica, graduum videlicet, minutorum primorum, secundorum &c.

Scholium.

MUltiplicatio a sinistrâ in dextram usum habet non levem in divisione. Fit hunc in modum. I. Nulla nota reservatur, id enim commodius. II. Si notæ ultimæ multiplicatione peractâ, ex multiplicationibus reliquarum productum aliquod oriatur, duabus notis scribendum, ejus nota sinistra scribatur infra eam, quæ in priori producto est prima, seu dextra.	183 6 ——— 688 41 ——— 1098

Oporteat 183 ducere in 6. 6 in 1 est 6.: scribo ergo 6 infra lineam. 6 in 8 est 48, quia hoc productum constat duabus notis, sinistram 4 scribo infra 6, & 8 ante 6. 6 in 3 est 18, rursus 1 scribo infra 8, & 8 ante 8. Factâ igitur additione, productum quæsitum est 1098. Demonstratio ex supra dictis colligitur.

CAPUT VIII.

Multiplicatio expeditissima per laminas tabulæ Pythagoricæ.

LAminarum constructio tradita est cap. VI. jam usus earum planè, eximius deinceps exponetur.

PRAXIS.

A.	597	
B	48	
	4776	C
	2388	D
	28656	E

DEntur numeri A, B inter se multiplicandi. I. quærantur laminæ, quæ dati majoris A notas habent in vertice, & sibi mutuò apponantur, adjectâ ad lævam laminâ exponente XZ, *a* sic., ut in primo, ac supremo ordine stet numerus datus A.

a tabellam vi de c. 6.

II. Minoris dati B notam primam 8 quære in laminâ exponente XZ, ordinemque illi respondentem, octavum nempe, exscribe, infraque lineam repone, & sit C. Pari modo numeri B notam secundam 4 quære in lamina exponente, ordinemque illi respondentem, nempe quartum, describe, sitque D. Sed prima ejus nota 8 scribenda est infra secundam producti primi C. Quod si numerus B plures haberet notas, eæ similiter in exponente laminâ repertæ exscribendos numerorum ordines reliquos indicarent.

III. Producta demum C, D, in unam collecta summam E, multiplicationis A per B pro-

productum quæsitum exhibebunt.

Demonstratio.

Facilis est, tum ex ipsâ laminarum constructione, traditâ cap. VI., tum ex iis, quæ de multiplicatione communi demonstrata sunt. Numerus enim 56 repertus in laminæ primæ quadrato VIII. est octies 7, ac proinde fit ex 8 in 7. Sed, quia 56. duabus constat notis; primam 6, quæ in inferiori triangulo est scribo infra lineam, alteram verò 5, quæ est in triangulo superiori, servo. Pari modo numerus 72, in secundæ laminæ quadrato VIII repertus, est octies 9; ac proinde est is, qui fit ex 8 in 9. Sed, quia 72 duabus notis constat, ejus nota secunda 7 ad tertium, prima verò 2 sola ad secundum locum pertinet. Ad eumdem verò etiam pertinet nota 5 servata. Ergo hæ duæ notæ 5, & 2 in unam sunt colligendæ 7, quæ secundo loco infra lineam scribetur. Atque hæc causa est, cur semper nota trianguli superioris cum notâ sequentis trianguli inferioris coalescat, ac proinde cur notæ, in eodem rhombo existentes, ad locum eumdem pertineant, saltem quoad primam aggregati notam. Nam si notæ alicujus rhombi collectæ numerum faciant binis notis constantem, secunda nota ad sequentem rhombum rejicitur.

597.	A.
48	B
4776	C
2388.	D
28656	E

Postremò numerus 40, repertus in VIII quadrato laminæ tertiæ, est is, qui fit ex 8 in 5: cujus sola prima nota o pertinet ad locum tertium, ad

ad quem, quia etiam pertinet nota servata 7, in eodem cum o rhombo existens, eæ rursum debent coalescere. Sed, quia o addito ad 7 manet 7, infra lineam scribe 7 loco tertio; alteram verò 4, quæ in ultimo est superiori triangulo, quarto loco. Octavus igitur ordo in laminis, hoc est numerus ipse C, est is, qui fit ex A 597 ducto in 8 primam notam ipsius B. Pari ratione ostendam ordinem 1 v, hoc est numerum D, eum esse qui fit ex A 597 in 4 secundam notam ipsius B. Ergo eorum summa E est is, qui fit ex A in totum B. *Q. F. D.*

Laminarum igitur artificium in his duobus consistit. Primò, quòd laminæ quælibet componi inter se possint, ac proinde quivis numerus statui in supremo ordine. Secundò, quod numeri, duabus notis constantes, in laminis ita descripti sint, ut prima nota in triangulo inferiori, altera in superiori sit reposita. Unde fit, ut quia triangulum quodlibet superius cum laminæ sequentis triangulo inferiori unum rhombum constituit, nota superior laminæ præcedentis, quæ semper est ea ipsa, quæ mente reservanda esset, reperiatur in eodem rhombo cum laminæ subsequentis notâ inferiori, seu primâ, cum qua debet coalescere, ut eodem, quo ipsa, loco scribatur.

Cæterum quàm expedita, facilis, secura hæc methodus sit, usu ipso docebitur, quisquis voluerit experiri.

CA-

CAPUT IX.

Divisio.

QUid sit divisio, expositum est defin. XIV. lib. VII., qui nobis primus est. Duos proponam modos, quorum primus minùs usitatus est, sed melior; alter usitatior quidem, sed implicatior.

PRAXIS MODI I.

NUmerus detur AC dividendus per numerum Z.

I. Ex dividendo accipe tot notas postremas, quot constat notis divisor, vel, si hæ numerum efficiant divisore minorem, ut in exemplo nostro accidit, cum 459 minor sit, quàm Z 597, illis unam adhuc appone 0. Atque ita constituitur primum divisionis membrum AB, quod puncto secerne.

```
              Z
  A  B  C    597 Divis.
  4590.9.3.
  4179      {769
  ---------  X
D 411.9
  358 2
  ---------
E     537. 3
      537  3
  ---------
        0
```

II. Vide, quoties divisor Z in membro AB contineatur. Id si non appareat, quære ultima divisoris nota 5 quoties contineatur in ultimis duabus notis membri AB Quod si divisor, & membrum æquè multis con-

```
            Z
A  B  C    597 Diviſ.
4590.9.3
4179     {769
--------  X
D 411.9
  358 2
--------
E      537.3
       537 3
--------
        0
```

conſtarent notis, quærendum eſſet, quoties diviſoris nota ultima 5 contineatur in membri ultimâ Reperies contineri ſepties: ſcribe igitur 7 poſt lunulam. Non licebit autem poſt lunulam ſcribere unquam ſimul plus, quàm 9; quia, ut demonſtrabo infra, diviſor in membro nunquam continetur ſæpius, quàm novies.

III. Per notam 7, jam in quotiente ſcriptam, multiplica totum diviſorem Z, a ſiniſtrâ in dextram. Productum 4179, quod membro eſſe debet minus, vel æquale, ipſi membro ſubſcribe, ab eoque aufer, & reſiduum D 411, quod minus ſit oportet diviſore Z, ſcribe infra lineam, ante primam ejus notam, puncto adjecto. Hæc omnia ſi ſuccedant, legitima erit nota 7 poſt lunulam in quotiente ſcripta, & primi membri diviſio peracta.

IV. Quod ſi nota in quotiente ſcripta, diviſorem multiplicans, exhibeat productum membro majus, rejicietur, minori ſubſtitutâ: ſi verò productum exhibeat nimis parvum, quod nimirum, ubi a membro ſubtraxeris, reſiduum det diviſore majus, vel æquale, illâ ſimiliter rejectâ, major ſubſtituetur. Examen porro illud notæ poſt lunulam ſcribendæ expeditius redditur multiplicatione a ſiniſtrâ in dextram, ut ſupra præceptum eſt, inſtitutâ.

Ita-

Itaque divisionis difficultas in hoc potissimum consistit, ut talis in quotiente nota scribatur, per quam divisor multiplicatus a membro subduci possit, & cum subductus fuerit, residuum existat, vel nullum, vel divisore minus: talis enim nota indicabit, quoties divisor contineatur in membro.

V. Membrorum reliquorum similis est divisio. Ad residuum 411 D membri prioris A B dextrorsum adscribe notam 9, quæ membrum A B jam divisum antecedit. Atque ita secundum membrum constituitur 411. 9, circa quod eadem operatio instituetur, quæ circa primum.

Quæres nimirum, quoties divisor Z in eo contineatur. Reperies sexies: scribe ergo 6 post lunulam ante 7. Divisorem multiplica per 6, & productum 3582 membro 411. 9 subscribe, ab eoque subtrahe; residuo E 537 infra lineam reposito, punctoque ante ipsum notato.

Denique notam 3, quæ dextrorsum sequitur in dividendo AC, residuo E 537 adscribe, ut habeatur membrum tertium 537. 3. Rursum quære, quoties divisor in tertio membro contineatur: reperies novies. Igitur 9 quotienti adscribe. Divisorem deinde multiplica per 9, & productum 5373 a membro 5373 subtrahe, & nihil restat.

His peractis absoluta est divisio tota numeri dati AC per datum Z.

VI. Si divisione peractâ supersit aliquid, ut in exemplo hìc apposito supersunt 5, residuum

51. 2 13 *Divis.*
39

——

5 scribe supra divisorem 13, lineolâ interpositâ, ut fiat fractio N. Quotiens erit integer numerus post lunulam scriptus, unà cum dictâ fractione N.

```
12. 2 {    5
11 7  { 39 — N
           13
 ——
  5
```

VII. Si operatione primâ absolutâ, contingat in sequentium membrorum aliquo (o. 4) divisorem 5 ne semel quidem contineri, quotienti post lunulam adscribetur cifra, & membro apponetur adhuc una dividendi nota 5, lineolâ interpositâ, ut appareat o. 45 membrum esse geminatum, atque ita membrorum numerus appareat.

```
10. 4. 5  5 Divis.
10
———
 0. 45     209.
    45
 ———
     0
```

VIII. Ut minor numerus per majorem dividatur, ut 3 per 7, scribendus minor supra majorem, lineolâ interpositâ, ut fiat fractio R. Demonstrabitur lib. II. cap. II. Theor. I. coroll. II.

$\frac{3}{7}$ R

Demonstratio.

```
            Z
A B C     597 Divis.
4590. 9. 3
4179       {769
———        {X
D 411. 9
```

Tot scribuntur notæ post lunulam, ac proinde tot notis constat quotiens X, quot sunt membra divisionis, ut ex

	358	2
E	537.	3
	537	3
	0	

ex operatione præscriptâ patet. Tot verò sunt membra, quot notæ in dividendo AC primum membrum AB antecedunt, quod quidem per se manifestum est. Ergo tot notis constat quotiens X, quot notæ primum membrum dividendi antecedunt. Liquet igitur ex Porism. VIII. cap. III. numeri X, post lunulam scripti, notam ultimam 7 verum esse primi membri AB quotientem, qui nimirum indicet, quoties divisor Z in primo membro AB contineatur. Pari modo idipsum ostendam de reliquis notis numeri X post lunulam scripti, respectu membrorum cæterorum. Ergo numerus X verus est quotiens, proveniens ex divisione numeri AC per Z. *Q. E. D.*

Divis. 512 (13 — 39, 122, 117, 5; quotiens 39. $\frac{5}{13}$ N)

Quod verò, cum divisor non metitur dividendum, verus quotiens nihilominus sit numerus integer 39, unà cum fracto N, cujus numerator est is, qui peractâ divisione restat, nominator verò divisor ipse; sic demonstro. Ut unitas est ad *a* quotientem integrum 39, ita divisor 13 est ad dividendum 512, dempto residuo 5. Rursum, ut unitas est ad fractum N, sic *b* nominator 13 ad numeratorem 5, hoc est divisor ad residuum. Ergo, ut unitas ad *c* integrum cum fracto; ita est divisor 13 ad totum dividendum. Ergo integer ille cum fracto verus *d* quo-

a patet ex def. 14. l. 7 & ex jam ostensis.
b parebit ex theor. 1. cap. 2. l. 2.
c 24. 5.
d defin. 14. 7.

Digitized by Google

Cur autem nunquam simul ad quotientem liceat adscribere plus, quàm novem; ita fiet manifestum. Vel membrum A, & divisor B æquè multis constant notis; vel membrum excedit unâ, (e neque enim potest unquam pluribus excedere.) Si æquè multis notis constant, liquet ex Porismate IV. cap. III., B in A contineri minùs, quàm decies. Si membrum A unâ nota excedat divisorem B, tunc ultima nota divisoris major est ultimâ notâ membri, ut patet ex num. I.; ac proinde per Porisma V. cap. III. rursum continetur B in A minùs, quàm decies. Quare cum divisor in membro quolibet contineatur semper minùs, quàm decies, causa jam manifesta est, cur non liceat unquam ad quotientem plus simul adscribere, quàm 9.

A	2996
B	1000

A	2999
B	300

e patet ex nu. 1.

PRAXIS MODI II.

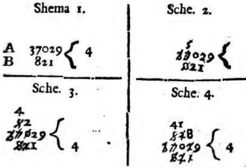
OPorteat numerum A dividere per numerum B.

I. Divisorem subscribe dividendo ad sinistram, sic, ut nota ultima ultimæ respondeat, penultima penultimæ, & sic deinceps. Quod si numerus supra divisorem positus 370 k tunc minor esset divisore, oportebit divisorem ad unum locum promovere dextrorsum, ut in exemplo cernitur.

k Sche. 1.

Censetur autem supra divisorem esse positum, quidquid illi ad lævam est. Unde supra 821 est 3702; supra 8 est 37; supra 2 est 370.

Schema



Nota. Characteres, quibus ad dextram hìc virgula eſt, cenſetur, deleti.

II. Quære quoties diviſor in notis ſupra ipſum poſitis contineatur. Sed quia plerumque hoc judicatu difficile eſt, quære quoties ultima diviſoris nota 8 in numero ſupra ipſam ſcripto 37 contineatur, reperies contineri quater.: ſcribe ergo 4 poſt lunulam.

III. Per notam 4, in quotiente ſcriptam, multiplica totum diviſorem, & productum ſubtrahe a notis 3702. ſupra diviſorum ſcriptis: & reſiduo ſupra eaſdem ſcripto, dele tam diviſorem, quàm notas ſupra ipſum poſitas. Malunt autem plerique ſingulas ſeorſim notas diviſoris, per quotientem 4 multiplicatas, a numeris ſupra ipſas poſitis ſubducere, ſubtractione videlicet multiplicationi alternatim interpoſitâ.

Exemplum.

a 8 in 4 facit 32, quæ ſubtracta ex 37 relinquunt 5: dele *b* 37, & 8; 5 vero ſcribe ſupra

a Sche. 1.
b Sche. 2.

K 7. Rur-

7. Rursum 2 in 4 faciunt 8, quæ subtracta ex 50 relinquunt 42: dele *c* igitur 50, & in divisore 2; residuum verò 42 scribe supra 50. Denique 1 in 4 facit 4, quæ subtracta a 422 relinquunt 418: dele *d* igitur 422, & 1; residuum autem 418 scribe supra 422. Atque ita divisoris applicatio una peracta est.

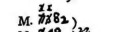
c Sche. 3.
d Sche. 4.
e Sche. 2.

II. Verùm *e*, quia ultima divisoris nota 8, per quotientem 4 multiplicata, & subtracta ex 37, etiam nota penultima 2, per eumdem quotientem 4 multiplicata, subtrahi, debet a residuo 50 supra ipsam posito, itemque & prima 1 multiplicata *f* per quotientem eumdem 4 similiter a residuo supra ipsum scripto 422 subducenda est: hinc fit, ut dum quæritur, quoties divisoris nota ultima 8 in notis supra ipsam existentibus 37 contineatur, talis post lunulam nota in quotiente sit reponenda, per quam singulæ notæ divisoris multiplicatæ possint subtrahi a numeris supra ipsas scriptis, & eâ quidem adhuc lege, ut ultimâ subtractione peractâ, residuum 418 *g* sit vel nullum, vel divisore minus, quemadmodum num. IV. modi I. est traditum. Quare si primâ subtractione factâ, nequeat peragi secunda, aut his peractis, tertia; nota post lunulam scripta minuenda est unitate eòusque, donec subtractiones singulæ possint absolvi. Prius igitur, quàm opereris, seriò tota operatio num. III. præscripta erit mentaliter peragenda, ut nota in quotiente adscripta examinetur. Quod sanè non Tyronibus modo, sed etiam non raro exercitatis submolestum est. Unde satius erit, hoc examen notando seorsim instituere.

f Sche. 3.
g Sche. 4.

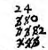
Exemplo jam dicta declaremus. Detur M de-

Sche. 5.



dividendus per N. Quæro, quoties N in notis supra ipsum positis 738 contineatur. Reperio ter. Scribo ergo 3 post lunulam. 2 in 3 facit 6, quæ ablata a 7, relinquunt 1. 4 in 3 facit 12, quæ ablata a 13, relinquunt 1. 9 in 3 est 27, quæ ex 18 auferri nequeunt. Nota igitur 3, ad quotientem scripta, nimis magna est. Quare hac rejectâ, substituo 2, & examen repeto, 2 in 2 sunt 4, quæ subtracta ex 7 relinquunt 3. 4 in 2 sunt 8, quæ subtracta ex 33 relinquunt 25 9 in 2 sunt 18, quæ subtracta a 258, relinquunt 240. Nota igitur 2 legitima est.

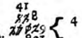
Sche. 6



Quamvis autem plerique, ut dixi supra, subtractionem multiplicatione permisceant, modo jam explicato; mihi tamen videtur consultius, ut multiplicatio tota simul absolvatur, & quidem a sinistrâ in dextram, adhibitâ cautione numero IV. modi I. præscriptâ.

V. Applicatione primâ divisoris absolutâ, quæ Schem. I. II. III. IV. exhibetur, promovebitur divisor B unâ notâ versus dextram, uti factum vides in Schem. VII, & operatio instituetur per omnia similis hactenus traditæ. Atque ita deinceps applicationes reliquæ, si plures essent faciendæ, absolventur.

Schem. 7.



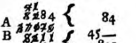
VI. Si factâ aliquâ promotione diviſoris, is ne ſemel quidem in notis, ſupra ſe poſitis, contineatur; ad quotientem ſcribatur cifra, & diviſor unò adhuc loco promoveatur, nullâ in dividendo notâ deletâ.

VII. Si quid ſuperſit diviſione peractâ, fiet quod præſcriptum num. VI. modi I.

Schem. VIII. exhibetur numeri A per numerum B diviſio tota, quæ ſupra, tantùm declarandi gratiâ, pluribus ſchematis fuit exhibita.

Demonſtratio

Schem. VIII.



HUjus modi ſimilis eſt demonſtrationi præcedentis.

Quamvis autem hæc ratio dividendi paſſim ſit uſitata, priorem tamen illam longè meliorem ſentio: uſitata ſiquidem, dum notas expungit, veſtigia diviſionis, ac membra confundit, ut ſi quid erratum ſit, correctio adhiberi plerumque vix poſſit, ut ex ſchem. VIII. ſatis apparet. Prior verò illa & ſingula diviſionis membra, & ſingularum producta multiplicationum, & quæ ſubtractione factâ ex membris ſingulis manent reſidua, diſtinctè exhibet. Quo fit, ut facilis ſit correctio, ſi error irrepſerit.

Plures alii modi diviſionis, qui non minus ingenii, quàm utilitatis habent, apud præfatum Auctorem a *videri poſſunt.*

a *Deſaig. pag.* 143.

USUS

USUS TABUBLÆ PYTHAGORICÆ

Communis in Divisione.

Datus sit numerus quicumque, duabus notis constans E, & nota quævis simplex F. Quæritur quoties F in E continetur. 62 E 8 F

Quæratur *o* in latere A B nota F, & in lineâ numericâ illi respondente numerus E, aut eo proximè minor 56. Ab hoc numero sursum ascendendo ad latus A C, incides in quotientem quæsitum 7. *o* vide tabel. c. 6.

Ratio patet ex constructione tabulæ, cap. VI. traditâ.

DIVISIONIS COMPENDIA.

C 2889 | 829 1000 D

$\left\{2889 \frac{829}{1000}\right.$ G

I. Cum ultima nota divisoris D est unitas, & reliquæ omnes cifræ; a dividendo C aufer tot ad dextram notas 829, quot cifras habet divisor; reliquas 2889 scribe post lunulam, quibus appone notas abjectas 829 supra divisorem 1000 scriptas, lineolâ interpositâ: quotiens erit 2889 numerus integer, post lunulam scriptus, unà cum fractione G. Quod si notæ abjectæ etiam cifræ sunt, ut in exemplo, quotiens erunt ipsæ notæ ad sinistram residuæ 342.

Demonstratio

	Divis.	
342 ¦ 000		1000
	{ 342	
	{ *Quotiens*	

FAcilè colligitur ex Porism. VIII. c. III. Quin etiam patet ex secundo compendio multiplicationis c. VII. Nam 1000 multiplicans 342, producet 342000. Ergo 1000 dividens 342000 facit quotientem 342: ut patet ex definitione XIII, & XIV. L. VII. Per defin. quippe XIII. L. VII., ut unitas est ad 1000, ita 342 est ad productum 342000. Ergo *a* permutando, ut unitas est ad 342, ita 1000 est ad 342000. Ergo per defin. XIV. 1000 dividens 342000, dat quotientem 342.

a 18. 5.

II. Cum divisor B constat aliis notis significativis unâ, vel pluribus diversis ab unitate, ad dextram verò habet cifras; a dividendo A rur-

A. 2. 4. 9. ¦ 46		B 2 ¦ 00	
2	{	146	
—	{	124 — m	
0.4	{	200	
—	{		
0.9			
9			
—			
1			

sum aufer ad dextram tot notas 46, quot habet cifras divisor, & notæ reliquæ 249 dividantur per solas divisoris notas significativas. Divisione peractâ, siquid supersit, quemadmodum hic super-

supereſt 1, id cum notis abjectis 46 quotienti integro 124 appone, diviſore ſcripto inferius, & lineolâ interpoſitâ. Quotiens erit integer 124 cum fracto *m*.

Demonſtratio

EX Poriſm. VIII. c. III, vel etiam ex compendio I. multiplicationis c. VII. diſcurſu ſimili, ut paullo ante, elicitur.

C. 27. 2.000 3 D 4
24

3.2. { 68000
3.2.
—
0

III. Cum dividendus habet cifras ad dextram, & nihil ex notis ſignificativis ſupereſt, tot quotienti adſcribentur cifræ, quot poſt ultimum membrum ſignificativum cifræ reſtant in dividendo.

Eſto C dividendus per D: 4 in primo membro 27 continetur ſexies. Scribo ergo 6 poſt lunulam. 4 in 6 eſt 24, quæ ſubſcribo membro 27, ab eoque ſubtraho, & reſiduum 3, repono infra lineam, eique adſcribo notam dividendi proximam 2, ut habeam ſecundum membrum 32. 4 in 32 continetur octies: ſcribo 8 in quotiente. 4 in 8 facit 32, quæ ſubtracta ex membro 32, nihil relinquunt. Quia verò in dividendo jam nihil reſtat, præter cifras, adſcribo quotienti cifras totidem, & peracta eſt diviſio.

Demonſtratio ex Poriſm. VIII. cap. III.

Digitized by Google

SPECIES DIVERSÆ

EUmdem ad modum tractandæ, qui traditur in multiplicatione cap. VII.

CAPUT X.

Divisio facillima per laminas tabulæ Pythagoricæ.

IN opere divisionis præcipuum facessit negotium inventio quoti, seu quotientis, per quem multiplicandus est divisor. Hunc quotum, quin etiam productum ipsum ex divisore, in quorum multiplicato, admirabili compendio laminæ exhibent. Cætera omnia peraguntur, ut in modo primo cap. præcedentis, qui aptior est huic methodo, quàm secundus.

			Z	
a	b	c	597	*Divis.*
4590.9.3.				
4179			{769 X	
d 411.9				
358 2				
e 537.		3		
537		3		
		0		

Datus sit numerus AC dividendus per numerum Z.

I. Appone sibi mutuò laminas, quæ in primo, eoque supremo ordine exhibeant divisorem Z. Præter schema hìc appositum, inspice tabellam AX cap. VI.

II. Determina membrum primum AB, ut num. I. modi primi cap. X.

III.

Digitized by Google

III. Vide, quis ordo in laminis numerum contineat membro æqualem, vel proximè minorem. Is autem ordo eſt proximè minor membro, quem immediatè ſequitur ordo, membro major. Numerus laminæ exponentis XZ, ordinem denominans, eſt quotus, poſt lunulam ſcribendus.

In exemplo noſtro reperis, ordinem proximè minorem membro eſſe ſeptimum. Scribe ergo 7 poſt lunulam.

IV. Ordinem inventum, qui eſt ipſum productum ex diviſore in quotum 7, exſcribe infra membrum AB, ab eoque ſubtrahe, & infra lineam ſcribe reſiduum 411, cui adjice, puncto interpoſito, notam 9, quæ in dividendo membrum primum A B antecedit, ut habeatur membrum ſecundum 411. 9.

V. Diviſio ſecundi membri, & ſequentium eodem modo peragetur, quo primi.

VI. Si membrum eſt minus ipſo diviſore, ac proinde & primo laminarum ordine, qui nimirum continet diviſorem; quotienti cifra adſcribetur, & membro adhuc una adjicietur nota ex dividendo, ut membrum habeatur novum.

VII. Si nonus ordo eſt membro minor, in quotiente ſcribatur 9.

Porro, exercitatione vel minimâ accedente, momento cernitur, quis ordo proximè minor, aut major membro ſit. Revocanda ſunt in memoriam Poriſmata II, ac III cap. III: item quæ monui cap. VI de modo exſcribendi, ac legendi ordines. Deinde reflectendum eſt maximè ad ultima loculamenta ordinum, quanta nimirum ſit nota in poſtremo ad lævam triangulo; & an ſumma notarum Rhombi proximi

exce-

excedat novem, adeoque num aliqua inde nota in triangulum postremum sit rejicienda, &c.

Demonstratio

FAcilè colligitur ex demonstratis cap. IX. & ex ipsâ divisionis definitione, quam vide ante lib. VII. def. XIV.

Quàm verò præstans sit hæc dividendi ratio, nemo certiùs intelliget, quàm qui fuerit expertus. Plures sanè divisiones unâ, alterâve horâ sic expediet, quàm die integro viâ communi. Ad hoc temporis, atque operæ ingens compendium accedit operationis securitas, quæ errori ex incuriâ, & hallucinatione orto vix locum ullum relinquit.

CAP. XI.

Additionis, Subtractionis, Multiplicationis, Divisionis examina.

TUtissimum est, ut per invicem hæ species examinentur, cum reliquæ Praxes sint errori obnoxiæ.

ADDITIONIS EXAMEN

123	A
25	B
——	
148	X
25	
——	
123	

FIt per subtractionem. Esto summa X, facta ex additione duorum numerorum A, & B. Alterutrum additorum, puta B, subtrahe à summâ X. Si residuus C sit idem cum Altero A, rectè pera-

123 C ... cta fuit additio. Erratum est, si non est idem.

Quòd si existat summa Z ex additione trium numerorum D, E, F, aut plurium, examen instituetur hunc in modum. Incipe à sinistrâ, & dic 2, 8, 4 sunt 14; hæc subtracta ex 16 relinquunt 2, quæ cum 0 faciunt 20. Dein 9, 3, 7 faciunt 19; hæc ablata ex 20 relinquunt 1, quod cum 8 facit 18. 7, 5, 6 faciunt 18, quæ ablata ex 18 nihil relinquunt. Proba igitur fuit additio, cum summa Z æqualis reperiatur omnibus suis partibus simul sumptis.

297	D
835	E
476	F
1608	Z
210	

SUBTRACTIONIS EXAMEN

Fit per additionem residui X ad numerum subtractum H: si enim summa K inde facta conveniat cum numero G, a quo facta est subtractio, proba est subtractio; mala, si non conveniat.

234	G
52	H
182	X
52	
234	K

Licebit etiam subtractionem examinare per subtractionem. Residuum X subtrahe ab G, & novum residuum fit L. Si hoc conveniat cum numero H prius subtracto, bona fuit prior subtractio. Ratio utriusque examinis manifesta est.

234	G
52	H
182	X
52	L

EXA-

Digitized by Google

EXAMEN MULTIPLICATIONIS

Fit per divisionem. Numeri se mutuò multiplicantes sint N, P. Per multiplicantem P divide productum Q. Si quotiens R conveniat cum multiplicato N, rectè instituta fuit multiplicatio; malè verò, si non conveniat.

```
 523 N
   6 P ( 523 R
----
3138 Q
```

a def. 13. & 14. Ratio patet ex notione primâ a multiplicationis, ac divisionis, & XVI. L. VII.

Si per laminas facta est multiplicatio, vix opus ullo examine: adeo secura est ab errore ista methodus. Si tamen volueris examinare, nullum erit examen facilius, quàm ipsa multiplicationis iteratio.

EXAMEN DIVISIONIS

Fit per multiplicationem. Divisor B multiplicetur per quotientem C: si producatur numerus divisus A, proba est divisio, ut patet ex definitione f divisionis, ac multiplicationis, & XVI. L. VII.

f def. 13. & 14. 7.

```
  A      B
2, 4 8.  2 Divis.
2
----        { 124
0. 4        {  C
  4
----
0.  8
    8
   --
    0
```

Si post divisionem aliquid supersit, divisorem E multiplica per quotientem F: producto G adde residuum 2. Si summa H sit æqualis dividendo A, proba est divisio.

A E

A	E
24. 1. 1.	3: *Divis.*
24	803 F
—	
0. 1. 1.	G
9	2409
—	
2	2
	——
	H. 2411

Quod si per laminas peracta divisio est, vix opus erit examine ullo. Si tamen examinare placuerit, multiplicatio ad examen requisita, iisdem manentibus laminis, quæ divisioni inservierunt, perficietur.

Scholium.

MOdi examinandi per abjectionem novenarii, quoniam fallaces sunt, hic non lubuit adscribere. Nituntur tamen insigni proprietate ejusdem numeri.

I. Metitur enim novenarius omnem numerum, cujus notæ acceptæ tanquam simplices conficiunt 9. *Tales numeri sunt* 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99, 108, 117, 126, *& alii infiniti.*

II. Imò cujuscunque numeri, a novenario numerati, notæ simpliciter acceptæ conficiunt 9, *illis tantum numeris exceptis, quorum omnes notæ sunt* 9, *cujusmodi sunt* 99, 999, *&c.*

III. Si numerus quicumque, duabus notis constans, quem 9 *non metitur, dividatur per* 9, *idem erit residuum cum eo, quod remanet, si notæ simpliciter acceptæ dividantur per* 9. *Ut si* 64 *dividatur per* 9, *remanet* 1. *Accipiantur jam notæ secundum valorem simplicem,*

6, &

6, & 4 faciunt 10, quæ divisa per 9, etiam relinquunt 1. Patet ex I. & II.

IV. Quod si notæ, numerum datum componentes, simpliciter acceptæ, conficiunt minus, quàm 9; hoc, quod conficiunt, erit ipsum residuum, quod relinquetur, numero dato per 9 diviso. Dentur 33: hæc divisa per 9 relinquunt 6, quantum videlicet conficiunt ipsæ notæ simplices 3, & 3.

V. Atque ex his demum consequens est, ex quovis numero diviso per 9 idem relinqui, quod relinquitur ex notis ejusdem numeri simpliciter acceptis, si per 9 dividantur.

Neminem legi, qui horum causam aperiat. Indicabo fontem verbo. Novenarius est unitate minor denario. Hoc rite si expendas, & applices, proprietates inde jam recensitas non difficulter deduces.

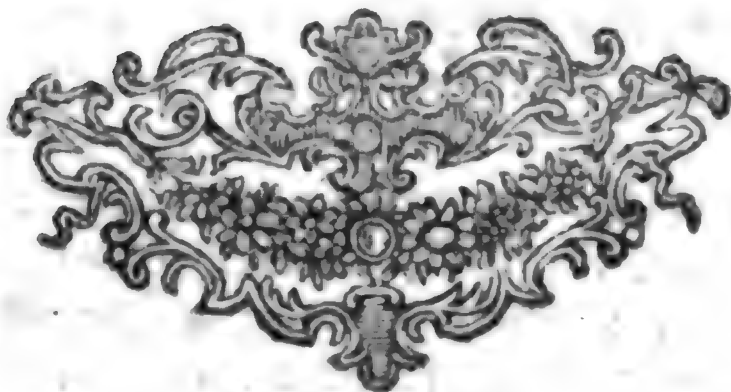
Porro quamvis hæc proprietas & pulchra sit, & verissima, examina tamen per illam instituta fallunt. A notis siquidem omnium numerorum addendorum simpliciter acceptis 9 abjiciuntur quoties possunt, hoc est dividuntur illæ per 9, & residuum servatur. Similiter a notis summæ simpliciter acceptis abjiciuntur 9, quoties possunt. Quod si residuum idem sit cum priori residuo, concluditur, rite fuisse peractam additionem. Sed fallit conclusio, quia licet plerumque tum erratum non sit, infiniti tamen casus dari possunt, in quibus hoc examen indicet additionem esse bonam, quæ mala est. Ratio est, quia potest novenarius, imò & quivis numerus, dividendo duos numeros inæquales, idem exhibere residuum: quod quidem per se est manifestum.

En

En Exemplum.

358	A
234	B
835	C

In numeris A, B, C, 3, & 5 ſunt 8, & 8 ſunt 16. Abjectis 9 reſtant 7, quæ cum 2 faciunt 9: quibus abjectis 3, & 4 faciunt 7. Numeris igitur A, B diviſis per 9. reſtant 7. Jam in numero C 8, & 3 faciunt 11: abjectis 9 reſtant 2, quæ cum 5 faciunt 7. Utrobique igitur tam ex addendis A, B, quam ex ſummâ prætenſa C ſuperſunt 7: neque tamen C vera ſumma eſt A, B, conficiunt enim illi 592. Pari modo in ſubtractione, multiplicatione, diviſione, radicum extractione hujus examinis fides ſuſpecta eſt.



ARITH-

ARITHMETICÆ PRACTICÆ

LIBER II.

LOGISTICA FRACTORUM NUMERORUM.

CAPUT I.

Fractorum Numerorum Definitio, Scriptio, Enunciatio.

NUmerus fractus, qui etiam fractio, & minutia dicitur, est pars, vel partes unitatis, aliquod totum divisibile repræsentantis. Ut si totum aliquod sectum sit in quinque partes æquales, & quispiam ex illis sumpserit tres; dicentur illæ tres quintæ partes numerus fractus.

Quoniam igitur fractus numerus est pars, partesve alicujus totius, duobus numeris scribi debet, quorum unus indicet quot partes ex toto accipiantur, alter quales. Scribuntur porro duo illi numeri supra invicem, lineolâ interpositâ. Ut vides in his exemplis.

Supe-

$A\frac{1}{2}$ $B\frac{2}{3}$ $C\frac{4}{7}$ $D\frac{11}{13}$

Superior numerus indicat, quot ex toto partes accipiantur, inferior designat, in quot partes totum ponatur divisum, ac proinde quales sint partes illæ, quæ ex toto sunt acceptæ.

Superior igitur, quia partium ex toto acceptarum indicat numerum, numerator dicitur, inferior autem, quia partium acceptarum designat speciem, nominator, seu denominator appellatur.

Fracti A, B, C, D sic enuntiantur. A una secunda, seu una dimidia, B duæ tertiæ, C quatuor septimæ, D undecim decimæ tertiæ.

Quamvis autem pro toto divisibili plerumque unitas supponatur, numerus tamen quicunque supponi potest. Quare E fractus, si totum sint 64 aurei, significat quinque octavas partes 64 aureorum.

$\frac{5}{8}E$

Denique ad fractorum naturam penitus intelligendam, id erit studiosè observandum, fractos ab integris numeris quoad rem non differre. Ea sola differentia est, quod fracti designent res, quæ sint partes rerum ab integris numeris designatarum, ac proinde, quod unitates fracti numeri sint relativæ: integri vero numeri unitates sint absolutæ. Dentur exempli gratiâ floreni 125, & fractio *a*, hoc est 4 vigesimæ unius floreni. Numerus integer 125 continet centum viginti quinque unitates, quarum singulæ florenum designant, fractus similiter *a*, hoc

L est

est quatuor vigesimæ partes floreni, continet quatuor unitates, quarum singulæ designant unam partem vigesimam floreni, hoc est assem unum, ac proinde quatuor vigesimæ floreni significant 4 asses, qui tam est numerus integer, quàm 125 floreni. Imò quilibet numerus integer, res quantas designans fractus est, si cum majori toto comparetur. Nam 2 floreni sunt una tertia unius libræ, sive *b*; & 3 pedes sunt tres quintæ unius passus, sive *c*; & 2000 passus sunt duæ quintæ unius milliarii Italici, sive *d*. Ad hæc Tyrones advertere, multum interest. Causa namque præcipua, ob quam illis fractorum numerorum tractatio difficilis, & obscura videri soleat, ea est, quod prius ad operationes fractorum, ac regulas addiscendas prosiliant, quàm illorum naturam perspexerint.

$\frac{4}{20}$ a

$\frac{1}{3}$ b

$\frac{3}{5}$ c

$\frac{2}{5}$ d

Monitum Generale.

Cum duæ fractiones, aut plures inter se comparantur, semper intelligendæ sunt, esse partes ejusdem totius, nisi contrarium indicetur.

CA-

CAPUT II.

Fractorum Theoria Prima.

THEOREMA I.

FRactus omnis est ad totum, seu unitatem, ut numerator ad denominatorem.

Demonstratio.

PAtet ex definitione numeri fracti capite præcedenti explicatâ. Denominator enim designat ipsum totum sectum in tot partes æquales, quot in denominatore unitates sunt. Numerator verò indicat, quot partes ex toto ita secto accipiantur. Quare cum fractus nihil aliud sit, quàm ille ipse partium numerus, quas acceptas esse ex toto, numerator indicat, manifestum est, fractum esse ad totum, ut numerator est ad nominatorem. Ex hoc rite intellecto existunt

Corollaria.

I.

$\frac{30}{20}$ a

$\frac{20}{20}$ b

$\frac{3}{3}$ c

$\frac{4}{4}$ d

CUm numerator est minor denominatore, fractus suo toto minor est.

Cum numerator nominatore major est, fractus est major toto. Sic fractus *a*, id est triginta vigesimæ, exemp. gr., floreni, hoc est 30 asses, sunt majores toto, nempe floreno, seu 20 assibus.

Digitized by Google

Cum numerator numeratori æqualis est, fractus toti æquivalet. Sic *b*, id est 20 vigesimæ floreni, hoc est 20 asses, conficiunt florenum. Sic *c*, *d* æquivalent unitati, seu toti, quod unitas repræsentat.

II.

$\frac{2}{3}$ f

Ex theoremate colligitur veritas illius, quod num. VIII. cap. IX. in modo primo divisionis traditur: nimirum cum numerus 2 minor per majorem 3 dividendus est, quotientem haberi, si major minori subscribatur, ut fiat fractio *f*. In omni
defin. 14. siquidem divisione quotiens est ad unitatem, ut dividendus, qui hic est 2, ad divisorem, qui hic est 3. Sed etiam fractio *f* est ad unitatem, ut 2 ad 3. Ergo *f* hic est quotiens.

THEOREMA II.

	E		F	
a	2		3	c
b	4		6	d

Si fracti unius numerator a *est ad nominatorem* b, *ut fracti alterius numerator* c *est ad suum numeratorem* d, *fracti æquales erunt.*

Demonstratio.

Fractus E est ad totum, ut numerator *a* ad nominatorem *b* per theor. I., hoc est per hyp., ut numerator *c* ad nominatorem *d*, hoc est per theor. I., ut fractus F ad idem totum. Quare cum ambo fracti E, & F ad totum, quod in utroque idem esse supponitur, eamdem habeant

habeant proportionem, per IX. lib. V. æquales erunt. *Q. E. D.*

Itaque valor fractorum non ex magnitudine numerorum, quibus exprimuntur, sed ex proportione eorumdem æstimandus est, quod ulterius ex theor. III. IV. V. innotescet.

THEOREMA III.

Fractus ille A major est altero B, cujus numerator e *ad nominatorem* f *majorem habet proportionem, quàm alterius numerator* g *ad nominatorem suum* h.

	A	B	
e	8	2	g
	—	—	
f	16	6	h

Demonstratio.

Nam per theor. I fractus A ad totum eamdem proportionem habet, quam *e* ad *f*; hoc est ex hyp. majorem, quam *g* ad *h*; hoc est per theor. I. majorem, quam fractus B ad totum idem. Ergo per X. lib. V. fractus A fracto B major est. *Q. E. D.*

THEOREMA IV.

Fracti, quorum numeratores in mutuos denominatores ducti eumdem gignunt numerum, æquales sunt.

Dentur fracti E, F; & tam *a* in *d*, quam *c* in *b* producant eumdem numerum *k*. Dico, fractos E, F æquales esse.

	E	F	
a	2	3	c
	—	—	
b	4	6	d
k	12		

 Demon-

Demonstratio.

PEr XIX. l. VII. erit *a* ad *b*, ut *c* ad *d*. Ergo per theor. II. fracti E, F æquales sunt. *Q. E. D.*

THEOREMA V.

FRactus ille A altero B major est, cujus numerator multiplicans alterius nominatorem majorem gignit numerum.

Producat *g* in *n* majorem numerum *c*, quàm *m* in *h*. Dico, A fractum majorem esse fracto B.

	A	B	
g	2	3	m
	—	—	
h	4	9	n
c	18	12	d

Demonstratio.

QUia *c* genitus ex *g* in *n* major est *d* genito ex *m* in *h*, habebit per corol. II. prop. XIX. l. VII. *g* ad *h* majorem rationem, quàm *m* ad *n*. Ergo per theor. III. fractus A major est fracto B. *Q. E. D.*

Corollarium.

EX IV. & V. theoremate modus habetur facillimus examinandi, fracti ne æquales sint, an inæquales, & uter major sit.

THEO-

THEOREMA VI.

Fracti D, G, idem nomen habentes p, eam inter se proportionem habent, quàm numeratores m. n.

Demonstratio.

Per theor. I. fractus D est ad totum, ut *m* ad *p*. Idem verò totum est ad fractum G, ut idem *p* est ad *n*: Ergo ex æquo per XXII. V. fractus D est ad fractum G, ut *m* ad *n*.

D	G
$\frac{m\ 7}{p\ 8}$	$\frac{5\ n}{8\ p}$

Q. E. D.

THEOREMA VII.

Dentur fracti P, R: primi numerator a *multiplicans alterius nominatorem* o *faciat* a o; *alterius vero numerator* c *multiplicans nominatorem primi* n *producat* c n. *Erit fractus P ad fractum R, ut* a o *ad* c n.

Demonstratio.

Nominatores *n*, & *o* invicem multiplicantes producant *n o*. Fractus P est ad totum, ut *a* ad *n*, per theor. I. Sed etiam per schol. prop. XVII. l. VII. *a o* est ad *n o*, ut *a* ad *n*. Ergo fractus P est ad totum, ut *a o* est ad *n o*. Atqui per schol. prop. XVII. *n o* est

no

ao cn

P $\frac{a}{n}$ $\frac{c}{o}$ R

Totum:

o eſt ad *c n*, ut *o* ad *c*; hoc eſt per theor. I., ut totum eſt ad fractum A. Igitur ex æquo per XXII. V. fractus P eſt ad fractum R, ut *a o* eſt ad *c n*. *Q. E. D.*

THEOREMA VIII.

SI duo fracti C, D eumdem numeratorem habuerint a, *erit prior C ad poſteriorem D, ut reciprocè poſterioris nominator* o *ad prioris nominatorem* n.

Demonſtratio.

EX *a* in *o* fiat *a o*, & *a n* ex *a* in *n*. Per præced. fractus C eſt ad fractum D, ut *a o* ad *a n*; hoc eſt per ſchol. prop. XVII. lib. VII., ut *o* ad *n*. *Q. E. D.*

$$C\,\frac{a}{n} \qquad \frac{a}{o}\,D$$

ao   an

CAPUT III.

Reductiones Fractorum.

PROBLEMA I.

Reductio fractorum ad minimos terminos.

DIcitur fractio ad minimos terminos reduci, cum reperitur ei æquivalens alia, minimis numeris expreſſa.

Datus ſit fractus A ad minimos terminos reducendus. Per prop. XXXV. lib. VII. inveniantur numeratori *n*, ac nomi-

A	B
n 27	3 r
p 36	4

natori

natori *p* proportionales minimi *r*, & *t*, ex quibus fractus constituatur B. Hic est quæsitus.

Demonstratio.

NAm quia per constr. *r* est ad *t*, ut *n* ad *p* æquales erunt fracti, A, & B, per theor. II. cap. præced. Neque potest alius fractus, qui minoribus terminis constet, fracto A æqualis exhiberi: ad hoc enim, ut patet ex II. theor., requirerentur duo numeri ipsis *n*, *p* proportionales, & minores minimis jam repertis *r*, *t*: quod fieri non potest.

Quod si *n*, *p* termini fractionis datæ A sint in proportione suâ minimi, non poterit fractio data in terminis minoribus exhiberi. Utrùm verò *n*, *p* sint in ratione suâ minimi, innotescet ex ipsâ constructione prop. XXXV. l. VII. Et universim per XXXIII. l. VII. omnes numeri inter se primi sunt in suâ proportione minimi.

PROBLEMA II.

Reductio fractorum ad nomen idem.

PARS I.

DAti sint duo quilibet fracti N, P ad commune nomen reducendi.

N		P	
a	3	5	c
b	4	6	p

Deno-

Denominatores, invicem ſe
multiplicantes, dabunt nomi-
natorem communem *b d*.
Tum numerator *a* ductus in
nominatorem *d* producat *a d*:

N		P		
2	1	3	c	erit fractus R æ
				Rurſum numerat
b	4	6	d	nominatorem *b* g
				fractus T par dato

Demonſtratio.

$$R\ \frac{6}{24}\ \frac{12}{24}\ T \qquad R\ \frac{ad}{bd}\ \frac{cb}{bd}\ T$$

theor.II.cap.præc.fracti N, &
Similiter, quia per idem ſcho
ut *c* ad *d*, rurſum per theor. II
æquales erunt. Datos igitur N
men reduximus. *Q. E. F.*

P A R S

DAti ſint tres fracti G, H,
nomen idem reducendi

$$\overset{R}{\frac{144}{192}}\quad \overset{T}{\frac{160}{192}}\quad \overset{V}{\frac{24}{192}}$$

a
b
adf
bd

Denominatores b, d, f inter se multiplicati dabunt denominatorem communem bdf. Numeratores singuli provenient, si numerator uniuscujusque fractionis datæ multiplicet productum ex nominatoribus reliquarum.

Sic, ut fractus G reducatur ad nomen bdf, ejus numerator a ductus in df, genitum ex nominatoribus reliquorum H, I, producat adf, erit fractus R fracto G æqualis. Ut reducatur H, ejus numerator ductus in bf, genitum ex denominatoribus reliquorum G, I, producet cbf, proveniet fractus T par dato H. Pari modo V æqualis proveniet dato I.

Demonstratio.

adf est ad bdf, ut a ad b per schol. p. XVII. l. VII. Ergo per theor. II. cap. præc. R, G æquales sunt. Pari ratione cbf est ad bdf, seu per schol. p. XIX. l. VIII. dbf, ut c ad d. Ergo per theor. II. etiam fracti T, H æquales sunt. Denique quia ebd, est ad bdf, ut e ad f; æquales erunt fracti V, I. Reducti sunt igitur fracti G, H, I, ad nomen idem. *Q. E. F.*

Operationem totam utriusque partis ipse litterarum conspectus exhibet: qui sanè Logisticees speciosæ fructus est proprius, & longè nobilissimus.

PARS III.

Dentur fracti quotcunque A, B, C, quos oporteat ad idem nomen reducere, & in minimis termi-

A	B	C
$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{8}$

terminis.

Inveni per XXXVI. & XXXVIII. lib. VII. minimum numerum 24, quem nominatores dati 4, 6, 8 metiuntur. Is erit communis nominator. Hunc nominatores dati 4, 6, 8 dividant per quotientes 6, 4, 3, qui si multiplicentur per numeratores datos 3, 5, 1. provenient 18, 20, 3 numeratores novi, eruntque fracti D, E, F ejusdem nominis datis A, B, C æquales, in terminis minimis.

		24
6	4	3
$\frac{18}{24}$	$\frac{20}{24}$	$\frac{3}{24}$
D	E	F

Demonstratio.

QUod sint æquales, sic ostendo. Ex constr., & ex scholio p. XIX. l. IX. patet, tribus hisce numeris 4, 24, 3 quartum esse proportionalem 18. Unde permutando 4 est ad 3, ut 24 ad 18. Ergo per Theor. II. fracti A, D æquales sunt. Pari argumento B, & E; C, & F æquales erunt.

Quod etiam sint in minimis terminis, sic demonstro. Ut habeantur fracti ejusdem nominis, & æquales datis A, B, C, necesse est, ut denominatores dati 4, 6, 8 adæquatè dividant nominatorem communem futurum: sic enim proveniunt quotientes, qui ducti in numeratores datos 3, 5, 1 exhibent novos numeratores quæsitos. Atqui per constr. nominator ille communis 24 jam inventus est minimus, quem nominatores dati 4, 6, 8 adæquatè dividunt. Ergo non possunt alii fracti, nominis ejusdem, datis

A, B,

A, B, C æquales inveniri, in terminis minoribus, quàm reperti jam D, E, F.

PROBLEMA III.

Fractionis reductio ad nomen datum.

F G
a 2 8 c
b 3 12 d 12 d
24 e

DAta ſit fractio F reducenda ad fractionem, cujus nominator ſit d.

Per XIX. l. IX., ut *b* ad *a*, ſic fiat *d* ad alium *e*: quod fit ducendo *a* in *d*, & productum *e* dividendo per *b*. Quotiens enim *e* erit numerator quæſitus, qui cum nominatore dato *d*, dabit fractum G æqualem dato F, ut patet ex Theor. II. cap. præc.

m.p
a 4 8 d 6 n 2 1
b 5 8 d 5 8
32 e {n 2
6 --m
5

Quod ſi *b* non metiatur *e*, ut contingit in hoc exemplo, ubi *b* dividens *e* dat quotientem *n*, *m*; quotientem integrum *n* ſcribe ſupra denominatorem *d*, erit fractus *n*, *d* + *m*, *p*, (hoc eſt ſex octavæ, cum duabus quintis ex unâ octavâ) æqualis fracto *a*, *b*.

Demonſtratio.

QUoniam, ut *b* eſt ad *a*, ita *d* eſt ad *n*, *m*; manifeſtum eſt, hunc numerum *n*, *m* deſignare quot partes à *d* denominatas,

nem-

nempe quot octavas partes, ex toto oporteat accipere, ut fracto *a*, *b* æqualis fractus habeatur nominis *d*. Cum igitur unitates singulæ integri numeri *n* designent ex toto accipi singulas octavas partes; liquet, id, quod in numeratore *n*, *m*, est minus unitate, nempe *m*, designare ex toto accipi insuper aliquid minus unâ octavâ parte, videlicet *m*, *p*, id est duas quintas ex unâ octavâ, quæ est fractio fractionis. Sed de his cap. VIII. plura.

l 7
—
8
P 1
17 + 1q 1
— — l,
20 2x 20

Hujus reductionis usus præcipuus est, ut valor fractionis datæ cognoscatur in partibus ejusdem totius notioribus. Ut si offerantur l, *id est septem octavæ unius perticæ 20 pedum: reducantur* l *ad vigesimas, provenient* p + q, x; *hoc est pedes 17 cum dimidio, quibus æquivalent* l, *id est septem octavæ unius perticæ.*

PROBLEMA IV.

Reductio fracti toto majoris ad integrum.

Isto fractus A toto major. Numerator *b* per denominatorem *c* dividatur. Quotiens *d* æquivalet fracto A.

De-

Demonstratio.

A
b 12
— (3 d
c 4

FRactus A eſt ad totum, ſeu unitatem pro toto ſuppoſitam, ut numerator *b* ad nominatorem *c* per th. I. cap. præc. Atqui etiam quotiens *d* eſt ad unitatem, ut numerator *b* diviſus ad nominatorem *c*, qui diviſor eſt. Ergo fractus A, & quotiens integer *d* eamdem rationem habent ad unitatem. Ergo per IX. V. æquales ſunt. *Q. E. D.*

B
c 14 { e 2
— 3 —
d 4 4

Quod ſi numeratore per nominatorem diviſo, quotiens ſit integer cum fracto, ut contingit in fractione B; tunc non poterit fractio data reduci tota ad integrum, ſed æquivalebit integro, & fracto ſimul ſumptis. Demonſtratio eadem eſt.

Eâdem ratione reducuntur aſſes ad ſolidos, florenos, pattacones; floreni ad aureos, libras &c.; pedes ad paſſus; pedes, & paſſus ad milliaria, &c. Ut ſi velim 40000 pedum reducere ad milliaria 5000 pedum continentia, divido 40000 per 5000, proveniunt 8 milliaria.

PRO-

PROBLEM

Integri numeri reductio
nominis dati

DAtus sit numerus integer a, reducendus ad fractum, cujus nominator sit b. a 7
Integer a datus multiplicet b nomen datum . subscribatur nomen datum b, nata æquivalet integro a.

Demonstratio

PEr definit. multiplicationis c est ad multiplicatum b, a est ad unitatem. Sed etiam ita fractus E est ad unitatem. E fractus E eamdem rationem h tem; ac proinde æquales sunt
Si cuivis integro, ut 8 sup fit fractio, vel potius quasi fr lens integro 8.
Hunc in modum solidi, flor aurei reducuntur ad asses; aur libras, &c.; milliaria ad passu gradus ad minuta prima, & h sic deinceps.

CAP. IV.

Additio Fractorum.

Addendus sit

I.

FRACTUS FRACTO.

$A\ \frac{2}{5}\quad \frac{6}{5}\ B$

$C\ \frac{8}{5}$

$D\ \frac{2}{5}\quad \frac{3}{7}\ E$

$F\ \frac{14}{35}\quad \frac{15}{35}\ G$

$H\ \frac{29}{35}$

SI ejusdem sint nominis, ut A, B, adde numeratores 2, 6, tum summæ 8 subscribe nominatorem communem 5. Fractus inde natus C erit summa datorum A, & B.

Si diversi sint nominis, ut D, E, per Prob. II. C. III. reducantur ad alios ejusdem nominis F, G. Horum summa H æquivalet datis D, E.

II.

INTEGER FRACTO.

$$A \quad 3 \quad \frac{4}{5} \quad B$$

$$C \quad \frac{15}{5} \quad \frac{4}{5}$$

$$D \quad \frac{19}{5}$$

INteger A reducatur ad fractum C, dato fracto B cognominem, per Probl. v. Cap. III. Tum additio peragatur, ut numer. I.

III.

PLURES INTEGRI, ET FRACTI.

COlligantur seorsim integri in unam summam, & seorsim fracti in summam suam, ut num. I. Tum hæ duæ summæ addantur, ut num. II.

Demonstratio horum omnium per se est manifesta.

CPA.

CAP. V.

Subtractio Fractorum.

Subtrahendus sit

I.

FRACTUS A FRACTO.

$$I\ \frac{2}{5}\qquad\frac{3}{5}\ K$$

$$L\ \frac{1}{5}$$

SI ejusdem sunt nominis, ut I, & *K*, minor numerator 2 subducatur a majori 3, & residuo 1 subscribatur communis nominator 5: fractus inde natus L remanet, minore dato I subtracto ex dato majori *K*.

$$M\ \frac{2}{3}\qquad\frac{3}{5}\ N$$

$$O\ \frac{10}{15}\qquad\frac{9}{15}\ P$$

$$\frac{1}{15}\ Q$$

Si diversi sint nominis, ut M, & N; reducantur ad alios O, P nominis ejusdem, per Prob. II. Cap. III., inter quos subtractio peragatur, ut supra.

II.

FRACTUS (S) UNITATE MINOR AB INTEGRO (R.)

EX integro R accipiatur unitas, a qua ſubtrahatur fractio data S; quod fiet, ſi ejus numerator *a* ſubducatur ex numeratore *b*, & reſiduo *c* ſubſcribatur idem nominator *b*. Fractio T inde orta, cum integro unitate mulctato, nempe cum 24, eſt reſiduum quæſitum.

$$\text{R}\quad 25\ \overset{\text{S}}{\frac{15\ a}{17}}\quad \frac{17\ b}{17\ b}$$

$$24\ \underset{\text{T}}{\frac{2\ c}{17\ b}}$$

Demonſtratio.

UNitas æquivalet fracto *b*, *b*, ut patet ex corol. 1. Theor. 1. Cap. 1. Ergo cum S ſubtraho ex *b*, *b*, ſubtraho S ab unitate. Atqui, ut patet ex num. II. ſubtraho S ex *b*, *b*, ſi ſubtraham *a* ex *b*. Ergo ſubtraho S ab unitate, dum ſubtraho numeratorem *a* ex numeratore *b*. Reliqua ſunt manifeſta.

III.

III.

FRACTUS UNITATE MAJOR AB INTEGRO, VEL INTEGER A FRACTO.

$X\ 12\ \frac{18}{4}\quad V$

$Y\ \frac{48}{4}\ \frac{18}{4}$

$Z\ \frac{30}{4}$

INteger X per Prob. v. C. III. reducatur ad fractum Y, dato fracto V cognominem. Tum fractus datus V subtrahatur ab integro sic reducto, nempe ab Y, ut numero I.

Pari modo subtrahetur numerus integer a fracto, qui integro dato major sit.

IV.

INTEGER CUM FRACTO EX INTEGRO.

$A\quad 6\frac{2}{3}\quad 16\quad B$

$C\ \frac{20}{3}$

INteger cum fracto A per n. II. C. IV. colligatur in unam summam C, quæ deinde subtrahatur ab integro dato B, ut numero præcedenti.

CAPUT VI.

Multiplicatio Fractorum.

Eſto multiplicandus

I.

FRACTUS PER FRACTUM.

A	B
$\frac{o\ 2}{p\ 3}$	$\frac{4\ m}{5\ n}$
C	C
$\frac{8}{15}$	$\frac{om}{pn}$

Videlicet A per B. Numeratores *o*, *m* invicem multiplicati faciant *om*; item nominatores *p*, *n* faciant *pn*. Erit *om* numerator, *pn* verò nominator fractionis C, productæ ex multiplicatione fractionum A, B.

I I.

FRACTUS PER INTEGRUM.

D

$\frac{k\ 2}{m\ 3}$ o E $5\ \frac{5}{1}$

F

$\frac{n\ 10}{m\ 3}$

Nimirum D per E. Integer E multiplicet *k* numeratorem fracti D. Productọ *n* ſubſcribe *m* nominatorem fracti D. Erit fractio F inde orta productum quæſitum.

Vel ſic. Integro E ſupponatur unitas, & multiplicatio fiat, ut num. I.

III.

III.

INTEGER CUM FRACTO PER INTEGRUM

INteger, & adhærens fractus colligantur in unam summam, per num. II. Cap. IV. Tum multiplicatio fiat, ut num. præcedenti.

Vel seorsim multiplica integrum per integrum, ac deinde fractum per integrum.

IV.

INTEGER CUM FRACTO PER INTEGRUM CUM FRACTO.

PEr num. II. Cap. IV. integrum unum, & adhærentem ei fractum collige in unam summam. Alterum deinde integrum, & fractum illi adhærentem similiter collige. Tum hæ summæ multiplicentur, ut num. I.

Demonstratio.

pnm omn

uni. $A\frac{o}{p}$ $B\frac{m}{n}$ $C\frac{om}{pn}$

SOla numeri I operatio demonstranda est, reliqua siquidem ex illâ patent. Ostendendum est igitur fractum B esse ad fractum C, ut unitas est ad fractum A. Hoc enim est B multiplicatum per A producere C, ut patet ex defin. XIII. VI.

Ducatur *m* in *pn*, productum erit *pnm*. Pari modo *om* ducatur in *n*, productum erit *omn*. Igitur per Theor. VII. Cap. III., B est ad C, ut *pnm* est ad *onm*. hoc est per schol. Prop. XVII. lib. VII., ut *p* est ad *o*; hoc est per Theor. I. Cap. II, ut unitas est ad fractum A. *Q. E. D.*

Scholium.

Cum fracti multiplicandi singuli minores sunt unitate, productum utrolibet minus est; id quod mirari solent Tyrones. Sed res ex definitione multiplicationis illico cernitur.

	2	3	6
un.	A	B	C
	3	4	12

Cum enim exem. gr. A multiplicans B producit C; unitas est ad A, ut B ad C. Sed unitas ponitur major, quàm A. Ergo etiam B major est, quam productum C. Quòd si A multiplicans B producat C; erit rursum, ut unitas ad B, ita A ad C. Atqui unitas ponitur major, quàm B: ergo etiam A major est, quàm productum C.

Si multiplicandornm unus est unitate major; tunc productum erit hoc minus, sed altero majus.

CAP.

CAP. VII.

Divisio Fractorum .

Dividendus sit

I.

FRACTUS PER FRACTUM .

$$\overset{A}{\frac{a\,6}{c\,8}} \text{ per } \overset{B}{\frac{m\,2}{n\,4}} \left\{ \overset{C}{\frac{o\,3}{p\,2}} \right.$$

NImirum A per B. Si divisoris B termini *m*, & *n* metiantur dividendi A terminos *a*, & *c* : numeri *o*, & *p*, per quos metiuntur, constituent fractum C quotientem quæsitum .

$$\overset{A}{\frac{a\,4}{c\,9}} \text{ per } \overset{B}{\frac{m\,3}{n\,5}} \qquad \overset{E}{\frac{n\,5}{m\,3}}$$

$$D \left\{ \frac{an\ 20}{cm\ 27} \right.$$

Si verò divisoris B termini non metiantur terminos dividendi A ; divisorem B inverte , & fiat E , perque eum sic inversum multiplica dividendum A . Productum D erit quotiens quæsitus .

II.

FRACTUS PER INTEGRUM, SEU INTEGER PER FRACTUM.

$\frac{2}{3}$ per $\frac{6}{1}$ ($\frac{2}{18}$

INtegro ſupponatur unitas, & diviſio fiat, ut num. 1.

III.

INTEGER CUM FRACTO PER INTEGRUM, VEL PER INTEGRUM CUM FRACTO.

REdigantur utrimque ad unam ſummam per num. 11. Cap. IV. Tum inter utramque ſummam peragatur diviſio, ut num. 1.

IV.

INTEGER MAGNUS CUM FRACTO PER INTEGRUM.

EXempli gratiâ 598 cum fracto A per 3. Commodiùs ſic operabere. Integer 598 per 3 dividatur, & quotiens ſit 199. Si quid ſuperſit, ut hìc 1, id addatur fracto A, per num. 11. Cap. IV., ut habeatur ſumma B, quam divide per 3, ut num. 11. Quotientem C appone quotienti integro

A: $598\frac{2}{3}$ per 3

$\frac{5}{3}$ B $\frac{5}{9}$ C ($199\frac{5}{9}$ C

tegro priori; eritque 199 cum C quotiens quæsitus.

Demonstratio.

A B
a m { o
—per— —C
c n p

SOla operatio num. I. demonstranda est, reliquæ enim ex hac sunt manifestæ. Metiantur primò *m*, & *n* ipsos *a*, & *c* per *o*, & *p*. Quoniam ergo *m* metitur *a* ex suppositione per *o*; *m* in *o* producet *a* per axio. VIII. lib. VII. Rursum quoniam *n* metitur *c* per *p*; *n* in *p* gignet *c*. Ergo per demonstrationem Cap. præced. fractus B, multiplicans fractum C, producit fractum A. Ergo per defin. multip. unitas est ad B, ut C est ad A. defi. 13.7.
Igitur permutando, unitas est ad C, ut divisor B est ad dividendum A. Ergo per defin. divis. def. 14.
C est quotiens divisionis A per B.

mna
F —— mn
mnc
A B E
a m n
— per ——
c n m
(an
D (—
(cm

At cum termini divisoris B non metiuntur terminos dividendi A, tum admirabilior operatio videri solet, quod divisio per multiplicationem peragatur. Demonstrandum est igitur, si A multiplicetur per divisorem B inversum, hoc est per E, productum D fore ipsum quotientem divisionis A per B.

Termini divisoris *m*, *n* in se mutuò ducti faciant *mn*. Tum *mn* in *a*, & *c* producat *mna*, & *mnc*,

mnc, ex quibus fiat fractus F. Per schol. p. XVII. l. VII. *mna* est ad *mnc*, ut *a* est ad *c*. Ergo per theor. II. Cap. II. F, & A æquales sunt. Atqui numerator *m* divisoris B, dividens *mna* dat quotientem *na*, (quemadmodum enim multiplicatio speciosa perficitur solâ litterarum appositione, ita divisio solâ earumdem subtractione absolvitur) & nominator *n* ejusdem B divisoris, dividens *mnc*, quotientem dat *cm*. Ergo per I. partem fractus B dividet fractum F, per quotientem D fractum. Quare cum ostenderim, fractos F, & A æquales esse; etiam B dividet A per quotientem D, natum videlicet ex multiplicatione ipsius A per divisorem B inversum, hoc est per E. *Q. E. D.*

Scholium.

Mirari solent etiam hìc Arithmetices imperiti, in fractorum divisione, quotientem reperiri plerumque majorem numero ipso, qui dividitur: quod semper accidit, cum divisor est unitate minor. Verùm ex definitione ipsá divisionis ratio est manifesta. A divisum per B, quotientem exhibeat C. Ergo per defin. divis. unitas est ad quotientem C, ut divisor B est ad divisum A. Igitur permutando, ut unitas est ad divisorem B, ita quotiens C est ad divisum A. Atqui ponitur unitas major esse divisore B. Ergo etiam quotiens C major est diviso A.

$$A\ \frac{5}{4}\ \text{per}\ \frac{2}{3}\ B\ \left\{\ \overset{C}{\frac{15}{8}}\ \ 1\right.$$

CAP.

C A P. VIII.

De Fractis Fractorum.

QUemadmodum, integris in partes sectis, fracti numeri oriuntur; ita ex partibus integrorum in alias minores partes subdivisis habentur fracti fractorum: ut si summam A ex B, hoc est 3 quartas ex 16 vigesimis unius floreni. Scribuntur, ut vides in exemplis hìc appositis A, B sunt 3 quartæ ex 16 vigesimis. C, D sunt 2 quintæ ex unâ sextâ. E, F, G sunt 2 quintæ unius sextæ ex 3 septimis.

A B	C D	E F	G
$\frac{3}{4}$ $\frac{16}{20}$	$\frac{2}{5}$ $\frac{1}{6}$	$\frac{2}{5}$ $\frac{1}{6}$	$\frac{3}{7}$

Compendii gratiâ, fractio fractionis appellari poterit fractio secunda: fractio fractionis fractionis dicatur fractio tertia.

Ut verò circa fractiones fractionum Logisticæ operationes instituantur, reducendæ prius erunt ad simplices.

Reductio Fractionis secundæ ad simplicem.

B	D
$\frac{2a}{3c}$	$\frac{p3}{n4}$

Z

E $\frac{ap\ 6}{on\ 12}$

DAta sit fractio secunda B, D. Numeratores *a*, & *p* in se invicem ducti faciant *ap*, & nominatores *c*, *n* faciant *cn*. Fractus E æquivalet fractioni secundæ B, D.

De-

Demonſtratio.

Fiat, ut *p* ad *n*, ita *c* ad z. Manifeſtum eſt, fractionis ſecundæ B, D, totum eſſe D, ac proinde fractionem ſecundam B, D eſſe ad ſuum totum D, ut eſt numerator *a* ad nominatorem *c*. Sed per theor. 1. Cap. 11. fractus ſimplex D eſt ad unitatem, ut *p* ad *n*: hoc eſt per conſt. ut *c* ad z. Ergo ex æquo fractio ſecunda B, D eſt ad uuitatem, ut *a* ad z. Deinde, quia per conſtr. ut *p* eſt ad *n*, ita *c* eſt ad z, erit per XIX. l. VII. *pz*, factum ex *p* in z, æquale *cn*, facto ex *c* in *n*. Quoniam igitur *p* multiplicans *a* facit *ap*, & *p* multiplicans z facit *cn*, erit per XVII. l. VII. ut *a* ad z. ita *ap* ad *cn*. Sed ut *a* eſt ad z, ita, quod jam oſtendi, fractio ſecunda B, D eſt ad unitatem; & ut *ap* eſt ad *cn*, ita per the. 1. Cap. 111. fractus E eſt ad unitatem. Ergo per XI. l. V. fractio ſecunda B, D eſt ad unitatem, ut fractus E eſt ad unitatem. Ergo per IX. l. V. fractio ſecunda B, D, & ſimplex E æquales. ſunt. *Q. E. D.*

Reductio fractionis tertiæ, quartæ &c. ad ſimplicem

DAta ſit fractio tertia C, D, E reducenda ad ſimplicem. Fractio ſecunda D, E reducatur ad ſimplicem I. Igitur jam C eſt fractio fractionis I. Rurſum igitur fractio ſecunda

C	D	E
$\frac{3\ a}{5\ b}$	$\frac{n\ 4}{p\ 6}$	$\frac{x5}{z\ 7}$
G $\frac{anx}{bpz}$	$\frac{nx}{pz}$ I	

C, I

C,I reducatur ad simplicemG. Erit hæc æqualis datæ fractioni tertiæ C, D, E, ut ex constructione ipsâ patet.

Operatio tota absolvitur hunc in modum: numeratores in se invicem ducti *a*, *n*, *x* faciant *anx*; nominatores verò *b*, *p*, *z* gignant *bpz*. Fractio G inde nata quæsitum exhibet.

CAP. IX.

Fracti Decimales.

LOgistica fractorum numerorum, cujus tam, praxim, quàm theoriam jam exposuimus; quamvis scitu & necessaria, nec injucunda sit; tamen in calculo longiori, & sæpius repetendo, quantum facessat negotii, sciunt omnes, qui numeros tractant. Verùm quemadmodùm dividendi labor per Neperi laminas Rabdologicas, & Logarithmos prope omnis evanuit; ita molestiis fractorum Simonis Stevinii præclaro invento liberati sumus. Is enim docuit, loco fractionum vulgarium decimales adhibere, quas insigni compendio ita prorsus tractare liceat, ac si integri essent numeri. Hoc verò inventum suum Auctor nec satis exactè, ac planè exposuit, nec demonstravit: neque enim, cum demonstrare se dicit, aliud agit, quàm exemplum afferre. Utrumque supplere conabimur.

Quid sint, & quomodo scribantur.

FRactiones, seu numeri decimales totius cujuspiam partes decimæ, centesimæ, millesimæ &c. denominatæ videlicet a numeris progressionis decuplæ, ab 1 incipientis, 10, 100, 1000 &c: quæ quidem more communi ita scriberentur, ut *a*, id est tres decimæ: ut *b*, id est septem centesimæ. Sed quia horum fractorum nominatores non aliis notis constant, quàm unitate, & cifris; expeditior calculus redditur, si non infra nominatores, sed supra ipsos, ut fit in scrupulis Astronomicis, exprimantur signis quibusdam, quæ hic vides expressa.

$\frac{3}{10}$ a

$\frac{7}{100}$ b

Decimæ. Centesimæ. Millesimæ. Decimillesf. Centimill. &c.

Signa.	I	II	III	IV	V	&c.
Valor.	10	100	1000	10000	100000	

I	II	III	IV	V	VI
3	4	6	2	9	4
a	b	c	d	e	f

Igitur Decimalium *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* hic valor est: *a*, tres decimæ: *b*, quatuor centesimæ: *c*, sex millesimæ: *d*, duæ decimillesimæ: *e*, novem centimillesimæ: *f*, quatuor millionesimæ. Quod si notis signatis aliæ non signatæ ad sinistram adhæreant, ut *g*, *h*, integros illæ numeros designant.

Cum

	I	II	
8	3	2	1
g	h	k	l

Cum igitur fractio decimalis exprimenda est, duo scribuntur, numerus, & signum. Numerus significat, quot partes decimales ex toto accipiantur; signum, quales.

Finis Decimalium.

EST, omnes operationes Arithmeticas, ad usum humanæ vitæ pertinentes, sinè fractis absolvere.

Modus utendi exponetur infra Cap. XV.

CAPUT X.

Requisita quædam ad demonstrationem Arithmeticæ decimalis.

SI methodicè procedatur, facilis reddetur operationum decimalium demonstratio.

Definitiones.

I	II	III
2	3	4
a	b	c

I. Notæ, signis affectæ, non æstimantur ex loco, hoc est juxta loci valorem, sed ut simplices, hoc est, ac si singulæ primo starent loco. Itaque si dentur decimales notæ, *a*, *b*, *c*, licet *a* tertio loco consistat, decimas significat, non 200, sed duas: similiter 3, licet existat loco secundo, centesimas significat, non 30, sed tres.

Google

	I	II	
4	8	2	9
p	q	a	b

II. Integri verò numeri, qui decimalibus adhærent, eodem valore sunt æstimandi, quo, si decimales abessent, æstimarentur. Sic notæ *p*, *q*, licet præcedant eas notæ decimales, *a*, *b*, valent quadraginta octo, non verò 4800.

II		
6	6	n
e	—	
	100m	

III. Cum nota decimalis scribitur modo consueto fractionum vulgarium, denominator præter unitatem habet tot cifras, quot indicantur a signo. Sic nota decimalis *e*, vulgari modo scripta, est fractio *n*, *m*, cujus nominator *m* habet duas cifras, tot nimirum, quot a signo designantur.

III
K 3
1000

IV. Valor signi decimalis est unitas cum tot cifris, quot indicantur a signo; ut si detur numerus decimalis *k*, valor signi est 1000.

Patet ex defin. III.

Axioma.

B	I	II	III
23	o	o	o
I	II	III	IV
57	o	o	o
B		C	

SI numero cuicumq; B, sive is sit purè integer, sive ex integro, & particulis decimalibus compositus, adjiciantur cifræ C, signis decimalibus affectæ, ejus valorem illæ non immutabunt. Nam neque cifræ ipsæ ullum ex se valorem habent, neque integro B præpositæ ejus locum attollunt, ut patet ex defin. II. Axioma illustrabitur infra.

Pari

	I			IV
A	43			5
	I	II	III	IV
	43	0	0	5

Pari modo cum series decimalis A interrupta est, si ea per cifras interpositas continuetur, valor dati A non immutatur.

THEOREMA I.

Particulæ decimales a, b, c, d *æquivalent fractioni* O, *cujus numerator sint ipsæ notæ datæ* a, b, c, d, *signis abjectis, & juxta loci valorem æstimatæ; nominator verò ipse maximi signi valor, hoc est unitas cum tot cifris, quot a signo maximo* IV *indicantur.*

Demonstratio.

Decimales numeri *d*, *c*, *b*, *a* scribantur explicitè, hoc est, fiant fracti E, F, G, H, quorum numeratores sint ipsæ notæ simpliciter acceptæ, nominatores verò sint valores

I	II	III	IV
7	2	3	4
a	b	c	d

$\frac{7234}{10000}$ O

$\frac{4}{10000}$ E $\qquad$ $\frac{4}{10000}$ I

$\frac{3}{1000}$ F $\qquad$ $\frac{30}{10000}$ K

$\frac{2}{100}$ G $\qquad$ $\frac{200}{10000}$ L

$\frac{7}{10}$ H $\qquad$ $\frac{7000}{10000}$ M

$$\begin{array}{r} 4 \\ 30 \\ 200 \\ 7000 \\ \hline 7234 \end{array}$$

ipſi ſignorum. Fiant deinde alii fracti I, *K*, L, M, quorum numeratores ſint eædem notæ, ſed ſecundum loci valorem æſtimatæ; nominator verò communis ſit valor ipſe ſigni maximi. Oſtendam, fractos I, *K*, L, M æquales eſſe fractis E, F, G, H. Comparemus duos L, & G. Quoniam locorum valor ſecundum progreſſionem decuplam procedit a dextrâ in ſiniſtram; valor autem ſignorum decimalium ea-

$$\begin{array}{cccc} \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} \\ 7 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \end{array} \qquad \frac{4}{10000}\ \text{E}\ \frac{4}{10000}\ \text{I}$$

$$\frac{7234}{10000}\ \text{O} \qquad \frac{3}{1000}\ \text{F}\ \frac{30}{10000}\ K$$

$$\frac{2}{100}\ \text{G}\ \frac{200}{10000}\ \text{L}$$

$$\frac{7}{10}\ \text{H}\ \frac{7000}{10000}\ \text{M}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 30 \\ 200 \\ 7000 \\ \hline 7234 \end{array}$$

dem progreſſione decuplâ procedit a ſiniſtrâ in dextram: manifeſtum eſt, quod valor notæ *b* ex

ex loco æſtimatæ, numerator videlicet 200 fractionis L, ita excedat valorem ſimplicem ejuſdem notæ *b*, hoc eſt numeratorem fractionis G, ut valor ſigni maximi IV, ipſe videlicet fractionis L nominator, excedit valorem ſigni II, quo ſignata eſt nota *b*, hoc eſt ipſum nominatorem fracti G. Ergo per Theor. II. Cap. II. fracti L, & G æquales ſunt. Simili planè argumento I, & E; K, & F; M, & H æquales erunt. Atqui fractiones I, K, L, M conficiunt fractionem O, quia 10000 valor ſigni maximi IV eſt communis earum denominator; numeratores verò earum collecti faciunt 7234, ut per ſe patet. Ergo etiam fracti E, F, G, H, hoc eſt decimales dati *d*, *c*, *b*, *a*, conficiunt fractionem O. *Q. E. D.*

THEOREMA II.

SI integro numero m, n *adhæreant decimales particulæ* a, b, c; *integer cum decimalibus æqualis erit fracto* P, *cujus numerator ſint omnes notæ datæ* m, n, a, b, c, *ſignis ubi adſunt abjectis, & juxta loci valorem acceptæ; nominator verò ipſe maximi* III *ſigni valor* 1000.

Demonſtratio.

		I	II	III	
3	2	5	4	9	
m	n	a	b	c	

$$f\ \frac{32000}{1000}\ e \qquad d\ \frac{549}{1000}\ e$$

PEr Theor. I. decimales *a*, *b*, *c* ſunt æquales fracto *d*, *e*. Quod ſi integro *m*, *n* ducto in *e* fiat *f*, & ſubſcribatur *e*, ut fiat fractus *f*, *e*; erit is

```
  549
32000  32549 h
-----  -----
32549   1000 e
          P
```

par integro *m*, *n* per Prob. V. Cap. III. Sed fracti *f e*, & *d e* conficiunt fractum P. Cum enim nominator *e* sit communis, soli numeratores *f*, *d* sunt addendi, quorum summa necessariò semper constat notis datis *m*, *n*, *a*, *b*, *c*, ut patet vel leviter rem expendenti. Ergo etiam integer *m*, *n* cum decimalibus *a*, *b*, *c* conficiunt fractum P. *Q. E. D.*

THEOREMA III.

```
    I IV                      II  V
2   2  3               a 5  2  7  5
    I II III IV          I II III IV V
c   2  0   0  3        c 5  2  0  7   0  0  5

    2  0   0  3 e        5  2  0  7   0  0  5 e
    -------------        ---------------------
1   0  0   0  0 d        1  0  0  0   0  0  d
```

Cum decimalis progressio a *interrupta est; tunc cifris interpositis interruptio progressionis tollatur, ut fiat* c; *& signis abjectis, infra* e *scribatur* d, *maximi* IV *signi valor. Fractio* e, d *erit æqualis* a.

Demonstratio eadem est, quæ in I. & II. Theoremate.

Corol-

Corollarium.

EX his amplius declarabitur axioma supra positum. Esto *d*, cui adjiciantur tres cifræ signis notatæ, ut fiat *f*: per Theor. II. æquatur fracto *g*, *h* : *f* verò fracto *k*, *m* per idem Theor. Quot verò cifris *k* excedit *g*, totidem quoque cifris necessariò *m* excedit *h*. Ergo per theor. I. Cap. III. lib. I. *k* est ad *g*, ut *m* ad *h* : & permutando *k* est ad *m*, ut *g* ad *h*. Ergo per Theor. II. Cap. II. lib. II fracti *k*, *m*, & *g*, *h* æquales sunt. Quare cum *k*, *m* sit *f*, & *g*, *h* sit *d*; etiam *d*, & *f* æquales sunt.

	I		I	II	III	IV	
d	35	f	3 5	0	0	0	
g	35	k	35000				
h	10	m	10000				

Est quidem id per se manifestum: unde & tanquam axioma proposui. Visum est nihilominus, quia maximus hujus axiomatis usus erit, declaratiunculam istam apponere.

CAP. XI.

Additio Decimalis.

ADdendi offerantur A, B, C. Ubi signorum progressio vel interrumpitur, ut in C, vel deficit, ut in B, ea aut cifris interpositis, ut in F, aut cifris adjectis, ut in E, continuetur. Qua quidem suppletione valor ipsius C, aut

A 3 5 2 4 7 1 (I II III IV)		D. 3 5 2 4 7 1 (I II III IV)
B 8 6 1		E 8 6 1 0 0 0 0 (I II III IV)
C 7 4 9 (II IV)		F . . 7 0 4 0 9 (I II III IV)
		G 9 0 3 2 8 8 0 (I II III IV)

$$I\ \frac{352471}{10000\,p} \quad K\ \frac{8610000}{10000\,p} \quad L\ \frac{70409}{10000\,p}$$

$$N\ \frac{9032880\,g}{10000\,p}$$

C, aut B non immutatur. Tunc similia scribantur sub similibus, eo ordine, quem vides in D, E, F. Peragatur deinde additio, ac si omnes essent numeri integri. Summæ G notas primas iisdem signis affice, eritque hæc summa quæsita.

Demonstratio.

PEr Theoremata superiori capite demonstrata D, E, F æquantur fractis I, *K*, L, quorum numeratores sunt ipsi D, E, F abjectis signis accepti ut integri; nominator verò communis *p*, maximi signi valor. Sed ut horum fractorum habeatur summa, tantum opus est addere

addere numeratores, hoc est ipsos D, E, F, tanquam integros, & summæ subscribere nominatorem communem *p*. Ergo etiam, ut habeatur summa datorum D, E, F, tantùm opus est, ipsos D, E, F acceptos velut integros addere, & summæ *g* subscribere *p*, maximi signi valorem, ut summa habeatur fractio N. Sed fractio N per Theoremata Cap. præc. æqualis est summæ G: nam ejus numerator constat iisdem notis, quibus C; & nominator *p* est ipse maximi signi IV valor, per hyp. utrobique. Ergo G est summa quæsita datorum D, E, F, seu A, B, C. *Q. E. D.*

Quamvis interruptio signorum in praxi vix unquam, aut rarò offeratur, nihilominus, ut plena habeatur cognitio Logisticæ decimalis, etiam hunc casum tum hic, tum deinceps proponere, ac demonstrare voluimus.

CAPUT XII.

Subtractio Decimalis.

A $98\overset{I}{4}\overset{II}{2}$ C $98\overset{I}{4}\overset{II}{2}\overset{III}{0}\overset{IV}{0}\overset{V}{0}$

B $4\overset{II}{5}\overset{III}{9}\overset{V}{4}$ D $4\overset{I}{0}\overset{II}{5}\overset{III}{9}\overset{IV}{0}\overset{V}{4}$

Q $94\overset{I}{3}\overset{II}{6}\overset{III}{0}\overset{IV}{9}\overset{V}{6}$

E $\frac{9842000}{100000\,p}$ F $\frac{405904}{100000\,p}$

Opor-

$$T \frac{9436096\ q}{100000\ p}$$

Oporteat ſubtrahere B ex A. Integer minor ſubſcribatur majori, ut ſolet. Tum decimales ſimiles ſub ſimilibus collocentur, & loca ſignis vacantia, tam in principio, ut in A, quàm in medio, ut in B, cifris ſignatis ſuppleantur, ut factum vides in C, & D. Qua

			I	II
A	9	8	4	2
		II	III	V
B	4	5	9	4

			I	II	III	IV	V
C	9	8	4	2	0	0	0
			I	II	III	IV	V
D		4	0	5	9	0	4
			I	II	III	IV	V
Q	9	4	3	6	0	9	6

$$E \frac{9842000}{100000\ p} \qquad F \frac{405904}{100000\ p}$$

$$T \frac{9436096\ q}{100000\ p}$$

quidem ſuppletione datorum A, & B valor non immutatur, per axioma. Subducatur deinde D ex C, perinde ac ſi ambo toti eſſent numeri integri, ſeu abſoluti. Reſidui verò Q

primæ

primæ notæ iisdem signis afficiantur. Erit hoc residuum quæsitum.

Demonstratio.

PEr Theoremata Cap. X. C, & D æquantur fractis E, & F, quorum numeratores sunt ipsi C, & D, accepti ut integri, nominator verò communis p, ipse valor signi communis maximi. Ut autem F subtrahatur ab E, tantùm opus est numeratorem a numeratore subtrahere, hoc est D, tanquam integrum, à C tanquam integro, & residuo subscribere communem nominatorem p, maximi nempe signi valorem. Ergo ut D subtrahatur à C, hoc est per axioma, B ex A, etiam tantùm opus erit D, tanquam integrum, subducere à C, tanquam integro; & residuo subscribere p maximi signi valorem, ut habeatur residuum fractus T. Sed fractus T per Theorema II. æquatur Q: nam per hypothesim, & numerator q iisdem constat notis, quibus Q, & nominator p est valor signi maximi. Ergo etiam fractus T est residuum quæsitum. *Q. E. D.*

CAPUT XIII.

Multiplicatio Decimalis.

DEtur multiplicandus A per B. Nullâ signorum habitâ ratione, ita multiplicatio instituta-

ftituatur, ac fi A, & B effent integri numeri, fublatâ prius per cifras interpofitas (ut in A

I III			
7 4	A	G	H
I II III		704	52
7 0 4	A	———	———
I		1000 e	10 p
5 2	B		
———		36608 k	
I II III IV		———	
3 66 0 8	C	10000 f	
		N	

fecundo) progreffionis decimalis interruptione, fi quæ effet. Maxima deinde datorum A, B numerorum figna fibi adde. Eorum quippe fumma dabit IV fignum maximum, quo producti C nota prima fignari debeat, indicabitque pariter, quot notæ fignis ordine decrefcentibus fint afficiendæ.

Demonftratio.

PEr Theoremata Cap. X. A, & B æquantur fractis G, & H, quorum numeratores funt ipfi A, & B accepti tanquam integri, nominatores verò ipfi valores maximorum fignorum A, & B. Atqui, ut hi fracti G, & H inter fe multiplicentur, tantùm opus eft, ut numeratores eorum, hoc eft A, & B, accepti tanquam integri, fe invicem multiplicantes, novum

vum

Digitized by Google

vum faciant numeratorem k (ipsum nempe C, signis abjectis) cui deinde subscribatur nominator f, constans unitate, & cifris, e, p simul sumptis, valor scilicet utriusque signi maximi A, B. Ergo etiam, ut decimales A, & B invicem multiplicentur, tantùm opus est, ut A, & B accepti tanquam integri se invicem multiplicantes faciant numeratorem k, cui subscribatur nominator f, ipse nimirum valor utriusque simul maximi signi A, B, ut habeatur productum fractio N. Atqui per Theor. II. Cap. X. N æqualis est C: nam & numerator k iisdem constat notis, quibus C, & nominator f constat unitate, & cifris e, p, hoc est per hyp. tot cifris, quot designantur ab utrisque simul maximis signis A, B; hoc est per const. tot cifris, quot indicantur a signo maximo C. Ergo etiam C est productum quæsitum ex multiplicatione datorum A, & B. *Q. E. D.*

Si datorum unus est numerus integer, cui nulli adhæreant decimales, producti nota prima signabitur signo maximo alterius dati, & reliquæ signis ordine decrescentibus.

CA-

Digitized by Google

CAPUT XIV.

Diviſio Decimalis.

I IV V
A 2 5 8 7 9

I II III IV V
A 2 5 8 0 0 7 9

I II
B 5 7 3

III IV V
X 4 3 3

I II III
(4 5 0 2 C

$D \frac{2580079}{100000}$ P

$E \frac{573}{1000}$ q
f g

$Z \frac{433}{100000}$

$N \frac{4502}{1000}$ h
k

OPorteat A dividere per B. Primò progreſſionis decimalis interruptio, ſi quæ ſit cifris interpoſitis tollatur, ut in A ſecundo. Divide deinde A per B, perinde ac ſi ambo eſſent integri. Si jam diviſoris B ſignum maximum minus eſt ſigno maximo dividendi A, ab hoc illud aufer: ſigno reſiduo I I I notabitur nota prima quotientis C, reliquæ verò ſignis ordine decreſcentibus.

Quod

		I	II	III	IV		I	II	
k	2	3	0	0	0	m	5	6	
		I					I	II	
h	2	3				n (	4	1	0

Quod si *m* divisoris maximum signum majus sit signo maximo *h* dividendi, aliquot cifris dividendo adjectis (ut in *k*), signa, quæ desunt, suppleantur, donec subductio fieri possit.

	I	II	
p	8	2	5
			I
q	9	4	2

Idem fiat, cum divisor *q* est absolutè major dividendo *p*, quomodocumque signa se habeant.

Demonstratio.

PEr Theor. II. Cap. X. dati A, & B æquantur fractis D, & E, quorum numeratores *p*, & *q* sunt ipsi A, & B, accepti tanquam integri; nominatores verò *f*, *g*, valores ipsi maximorum signorum v, & II. Atqui, ut D dividatur per E, oportet solummodò *p* dividere per *q*, hoc est A tanquam integrum per B tamquam integrum, & *f* dividere per *g*, quod fit auferendo cifras *g* à cifris *f*, hoc est signum maximum dati B à signo maximo dati A. Ergo etiam, ut A dividatur per B, oportet solum A, acceptum ut integrum, dividere per B ut integrum, & quotienti *h* subscribere unitatem cum cifris, quæ restant cifris *g* ablatis a cifris *f*, ut sic habeatur pro quotiente fractio N. Sed per Theor. II. Cap. X fractio N æqualis est C; nam & numerator *h* iisdem constat notis, quibus C, nati enim sunt ex eorumdem numerorum divisione, & nominator *k*, ut mox osten-

O

oſtendam, eſt valor maximi ſigni ipſius C. Ergo C eſt quotiens ortus ex diviſione A per B. *Q. E. D.*

Quod autem *k* ſit valor maximi ſigni quotientis C, ſic oſtendo. Per conſtr. ſignum maximum G eſt id, quod remanſit ſigno maximo ipſius B ablato a ſigno maximo ipſius A. Atqui *g*, & *f* ſunt valores maximorum ſignorum A, & B; ac proinde per defin. IV. totidem conſtant cifris, quot indicantur a ſignis maximis ipſorum A, & B. Manifeſtum eſt igitur, cifris *g* ablatis ex cifris *f*, remanere *k* valorem ſigni maximi quotientis G.

In altero caſu, quo cifræ dividendo *b* ſunt adjiciendæ, ut ſiat *k*, ſic demonſtrabimus. Per I. partem jam demonſtratam *m* dividat *k*, & producat quotientem *n*: *k* æquatur *b* per axioma. Atqui *m* dividens *k* fecit quotientem *n*. Ergo etiam *m* dividens *b* gignet quotientem *n*. *Q. E. D.*

Porro ex conſtructione jam traditâ patet, cum diviſor eſt integer, quotientem iiſdem ſignis notari, quibus dividendus: item cum diviſoris, & dividendi ſigna maxima æqualia ſunt, quotientem eſſe integrum totum.

II. Si diviſione peractâ aliquid ſuperfuit, ut in exemp. I. ſuperfuit X; ejus notæ iiſdem ſignis ſunt notandæ, quibus totidem primæ notæ dividendi A.

Demonſtratio.

NAm A eſt D, & B eſt E: E verò dividens D relinquit Z, hoc eſt X per Theor. I. Cap.

I. Cap. 10. Clara ſunt iſta, ſi prior demonſtratio fuerit intellecta.

	I II III IV V		I II III	
A	2 5. 8 0 0 7 9	B	5. 7 3	
III IV V	VI VII VIII		I II III	IV V VI
X 4 3 3	0 0 0	{	4. 502	7 5 5
	t		C	r

	VI VII VIII
V.	3 5 5

III. Si reſiduum diviſionis adhuc alicujus momenti ſit, adjiciantur ei aliquot cifræ decimales, & diviſio continuetur, ut num. I. traditum eſt.

Ex diviſione A per B ſuperfuit X. Hoc ſi placuerit ulteriùs exhaurire, adjice aliquot cifras ſignatas, ut fiat X *t*: quod divide, ut num. I; & quotientem inde natum *r* adſcribe quotienti C; erit C *r* quotiens ex diviſione A per B. Tum V, quod ſupererit, jam multo erit minus priori reſiduo X, ſeu Z, ut pàtet ex num. præced., & hoc ipſum pluribus adjectis cifris, aut penitus evaneſcet, aut certè fiet quovis dato minus.

Demonſtratio.

QUoniam valor reſidui X, adjectis cifris *t*, non immutatur, X *t* æquivalebit ſoli X. Atqui X *t* diviſo per B, provenit quotiens *r*. Ergo etiam X diviſo per B, proveniet quotiens *r*. Atqui ex A minùs X diviſo per B provenit quotiens C: nam A diviſo per B ſuperfuit

 X. Ergo

X. Ergo ex A toto diviso per B provenit quotiens C *r*.

Praxim paucis sic complector.

AD residuum ex divisione decimali adjectis aliquot cifris, divisionem prosequere, & notas quotienti primo accedentes nota signis ordine crescentibus.

Corollaria.

I. EOdem planè artificio poterit evanescere residuum ex divisione integri per integrum; eademque erit demonstratio.

II. Quævis fractio eodem artificio reducetur ad partes decimas. Detur fractio *a*, *b*. Numeratori *a* aliquot cifras adjice, eumque sic auctum divide per nominatorem *b*, ut traditur num. I. Quotiens *d* æquivalet fractioni *a*, *b*.

$$\frac{3\ a}{7\ b} \qquad f\ 3\ \overset{I}{0}\ \overset{II}{0}\ \overset{III}{0}$$

$$d\ (\ \overset{I}{4}\ \overset{II}{2}\ \overset{III}{8}$$

Nam quia per axioma *a*, & *f* æquales sunt; etiam *b* illos dividens, quotientes æquales dabit. Atqui *b*, dividens *a*, dat in quotiente fractionem *a*, *b* per corollar. II. Theor. I. Cap. I.; dividens autem *f*, dat *d*. Æquatur ergo fractio *a*, *b* ipsi *d*.

Reductio fractionis datæ etiam continetur Probl. III. Cap. III.

CAP. XV.

Usus Decimalium numerorum.

I. Mensuræ, & pondera dividantur in 10 partes æquales: & singulæ decimæ rursum in alias æquales 10, quæ jam erunt centesimæ totius: atque harum singulæ iterum in 10, quæ proinde jam erunt millesimæ totius. Mensuris hunc in modum divisis si utamur in dimensione quacumque linearum, planorum, solidorum, liquidorum, ponderum, &c., nusquam calculo fractiones sese ingerent; sed earum loco integris numeris adhærebunt particulæ decimales, quas licebit tractare, ut integros numeros; quemadmodum per plura jam capita explicavimus.

B	C
I II III	14 | 560
7 2 8	—
	20
728	14
—— A	—
1000	20

Quod si sub finem totius operationis lubeat decimales particulas reducere ad fractionem denominationis datæ, exempli gr. si lubeat cognoscere, particulæ B, unius virgæ 20 pedum, quot pedes ejusdem virgæ conficiant, quæsitum facillimè obtinebitur hunc in modum. Denominator datus 20 multiplicans 728 faciat 14560, a quo aufer tot primas notas 560, quot indicantur a signo maximo decimali, sive quot sunt dati decimales. Residuum 14 est numerator quæsitus. Igitur

O 3 par-

Digitized by Google

particulæ B efficiunt unius virgæ 20 pedum partes C, nempe quatuordecim vigesimas, hoc est, faciunt pedes 14.

Demonstratio.

FRactio A, cujus numerator iisdem notis constat, quibus B, denominator verò præter unitatem habet tot cifras, quot designantur a signo maximo ipsius B, per Theor. I. Cap. X. æquatur B. Sed per Prob. III. Cap. III., ut fractio A reducatur ad denominationem 20, numerator 728 ducendus est in 20, & productum 14560 dividendum per denominatorem 1000, quod fit auferendo tot primas notas, quot sunt cifræ in 1000, hoc est, quot indicantur a signo maximo ipsius A. Liquet ergo veritas operationis præscriptæ.

II. Circumferentia circuli dividatur quidem in partes, seu gradus 360; at gradus singuli non in 60, sed in 10 æquales partes secentur. Tum singulæ decimæ unius gradus in alias 10, quæ jam erunt unius gradus centesimæ. Hæ rursum singulæ in 10, quæ jam erunt unius gradus millesimæ; & sic deinceps. Quod utinam Astronomis placuisset, aut certè deinceps placeret; profectò longè expeditior evaderet calculus, toties hoc in studio adhibendus.

III. Plerumque expediet, juxta I. Coroll. superius, cujuscumque divisionis residuum decimalibus cifris adjectis exhaurire, aut fractiones integris jam adhærentes in decimales convertere, ut Coroll. II. traditur, quando multæ cum fractis illis erunt operationes instituendæ: si una, alterave tantum, vix operæ pretium fuerit reductionem tentare.

ARITH-

ARITHMETICÆ PRACTICÆ

LIBER III.

De Radicum Extractione.

PRæcipuum Arithmeticæ Practicæ problema est radicis ex potestate data Extractio. Potestas autem est numerus ex alicujus numeri sæpius positi, sive ex æqualium numerorum multiplicatione procreatus. Radix est ipse numerus, qui multiplicatus potestatem genuit. Unaquæque verò potestas tot dicitur habere dimensiones, quot habet latera, sive quot æquales numeri ad ejus genesim requiruntur. Quadratus numerus appellatur, qui producitur ex quovis numero in se ipsum ducto, sive ex multiplicatione duorum æqualium. Talis est 4, qui fit ex 2 per 2: & 9. qui fit ex 3 in 3: & 16, qui fit ex 4 in 4 &c.

Cubus dicitur, qui fit ex trium numerorum æqualium multiplicatione, sive ex numero bis in se ducto, Talis est 8, qui fit ex 2, 2, 2: nam 2 in 2 facit 4; & 4 in 2 est 8.

Biquadratus, seu quadrato quadratus est, qui fit ex multiplicatione quatuor æqualium numerorum, sive ex numero in se ipsum ter ducto. Talis est 16, qui fit ex 2, 2, 2, 2; nam 2 in 2 est 4; & 4 in 2 est 8; & 8 in 2 est 16.

Supersolidus est, qui fit ex multiplicatione

5 æqualium numerorum, ſeu ex numero in ſe quater ducto. Atque hunc in modum reliquæ in infinitum poteſtates procreantur. Lege ſcholium noſtrum P. VIII. l. IX., in quo cætera huc necaſſariò pertinentia reperies.

Poteſtatis verò cujuſque radix ab ipſa poteſtate denominatur. Hinc radix quadrata, radix cubica, quadratoquadrata, ſuperſolida, &c. Singularum characteres, ſeu ſigna hìc adjungo.

R. vel latus

R. 2) radix quadrata.

R. 3) radix cubica.

R. 4) radix biquadrata.

R. 5) radix ſuperſolida.

Et ſic in infinitum.

Exempla nonnulla ſubjicio.

R. 12) vel R 2) 12, eſt radix quadrata numeri 12.

R 3) 25, eſt radix cubica numeri25; & ſic deinceps in aliis.

Porro expediet plurimum huic negotio radicum eliciendarum, geneſim poteſtatum etiam exprimere multiplicatione ſpecioſâ, quæ ſolâ litterarum appoſitione peragitur. Conſule,

Radix	a	le, quæ monui ante lib. VII. Eucl. *a* in *a* facit *aa* quadratum; & *aa* in *a* facit cubum *aaa*; & *aaa* in *a* facit quadratoquadratum *aaaa*.
Quadrat.	aa	
Cubus.	aaa	
Quad: quadr.	aaaa	
Surfolid.	aaaaa	

Et sic deinceps.

CAPUT. I.

Radicis Quadratæ Extractio.

Extrahenda sit radix quadrata ex numero A.

```
A  56, 70, 09 (753
   49          14
    7, 70
    7  25      150
   -------
       45, 09
       45  09
       -------
            0
```

I. Post binas quasque notas, a dextris sumpto initio, comma, aut punctum interpone; eritque numerus datus in membra sectus, binis notis constantia, præter ultimum, quod unicâ constare potest. Quot verò erunt membra, tot notis constabit radix quæsita.

II. Præsidio tabellæ hic appositæ, qua notarum simplicium quadrati continentur, quære postremi membri 56 radicem quadratam, aut si (quod hic contingit) quadratus non sit, radicem quadrati proximè minoris; ut quia ultimum

mum membrum 56. quadratùs non est, quære quadratum proximè minorem 49, ejusque radicem 7 scribe post lunulam. Erit hæc nota ultima radicis quæsitæ. Quadratum verò 49 aufer ex membro 56, & residuum 7 scribe infra lineam. Hæc operatio singularis est, neque amplius repetitur.

Rad.	Quad.
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81

III. Residuo 7 adscribe membrum penultimum 70, ut habeatur novum membrum totale 7, 70. Tum radix hactenus acquisita 7 duplicetur. Ea sic duplicata 14 divisor appellabitur.

Quære quoties divisor 14 contineatur in membro novo 7, 70, demptâ notâ primâ, nimirum in 77. Reperies contineri quinquies. Scribe ergo 5 post lunulam. Erit hæc nota radicalis altera.

Multiplicet deinde nota radicalis, jam reperta 5, divisorem 14, & fiat 70; eademque se ipsam multiplicans faciat quadratum 25. Hæc duo producta collige in unam summam, numeris ita collocatis, ut vides in hâc formulâ.

70
25
725

Summam 725 aufer ex membro 7, 70, & residuum 45 scribe infra lineam.

Poterit etiam multiplicatio institui hunc in modum. Divisori 14 appone notam radicalem 5, ut fiat 145, quæ per ipsam radicalem notam 5 multiplica. Idem oriri productum, quod priùs, patet ex P. III. lib. II.

IV. Hæc operatio in omnibus membris sequentibus eodem prorsus modo repetitur.

Resi-

Residuo 45 adscribe membrum antecedens 09, ut habeatur totale novum 45, 09. Tum radicem hactenus acquisitam 75 duplica, ut fiat divisor novus 150. Quære quoties hìc contineatur in membro 45, 09, demptâ primâ notâ, nimirum in 450. Reperies ter. Scribe ergo notam 3 post lunulam. Hæc deinde divisorem 150 multiplicans, faciat 450; multiplicans verò seipsam, faciat 9. Hæc duo producta adde, numeris, ut in adjectâ hìc formulâ, collocatis. Summam 4509 aufer ex membro 45,09, & quia nihil remanet, erit A numerus quadratus, ejusque radix 753.

450
9
4509

Quod si post ultimam subtractionem aliquid remanet, numerus, qui proponitur, quadratus non est: quadratus autem fit, si mulctetur residuo.

V. Quando factâ multiplicatione nequit fieri subtractio radicalis; nota ultimò reperta, per quam nimirum facta est multiplicatio, minuenda est, donec subtractio fieri possit.

Esto radix elicienda ex 784. Quadratum proximè minus ultimo membro 7 est 4, & radix ejus 2, scribenda post lunulam. Ejus quadratum 4 aufer ex membro 7, & restant 3, quæ subscribe, adjecto membro 84. Radicalis 2 duplicata dat divisorem 4,

7, 84	(298
4	4
3, 84	
3 84	
0	

qui in novo membro 3, 84, demptâ primâ notâ, hoc est in 38, continetur novies. Scribe ergo 9 post lunulam. 9 in 4 facit 36. 9 in 9 facit 81. Hæc producta adde numeris

ris collocatis, ut in hac formulâ. Summa 441 auferri nequit ex membro 3, 84. Rejectis igitur 9 subſtitue 8, & denuo multiplica. 8 in 4 facit 32. 8 in 8 facit 64. Summa eſt 384, quæ auferri poteſt.

36
8 1
——
44 1

VI. Quando diviſor in membro primâ notâ mulctato ne ſemel quidem continetur; ſcribatur cifra poſt lunulam, & membro illi nimis parvo membrum proximum adjiciatur.

Eſto radix eliciendа ex C. Ex membro primo 4 elicitur nota radicalis 2, cujus quadrato 4 ablato a membro 4 remanet 0, cui adſcripto proximo membro 15, fit membrum novum 0, 15, ſeu 15. In hoc primâ notâ 5 mulctato, nempe in 1, nota radicalis 2 duplicata, nempe 4, ne ſemel quidem continetur. Scribe igitur 0 poſt lunulam, & membro 15 nimis parvo adjice 16 membrum antecedens. Tum per omnia, ut prius, operaberis, radicem videlicet hactenus acquiſitam 20 duplicabis, &c.

C 4, 15, 16	(20
4	4
—	
0, 15	
15, 16	

VII. Quando membrum ultimum eſt 1, vel 2, vel 3, ſcribenda eſt unitas poſt lunulam, & ſubtrahenda ex membro.

C A P. II.

Radicis Quadratæ Demonſtratio.

NEminem hucuſque legi, qui extractionis radicum quadratæ, ac cubicæ demonſtratio-

ſtrationem perſpicuam, & integram exhiberet. Appellant quidem fere omnes Prop. IV. l. II. Elem. Sed difficultas tota in applicatione conſiſtit, quam vel omittunt, vel tam imperfectè exequuntur, ut pleraque extractionis myſteria in tenebris relinquant. Res interim eſt ſcitu digna inprimis, quæque ſubtilitatis habeat non parum; ejuſmodi tamen, ut ex iis, quæ hoc, & IV. capite allaturi ſumus, clarè intelligi poſſe exiſtimem.

PORISMA I.

Nullus quadratus numerus in principio cifras habet impares.

Demonſtratio.

Radix quæcumque quadratum generans, vel cifras habet in principio, vel non habet. Si habet, quemadmodum A, manifeſtum eſt, ut A ducatur in A, ſolas notas ſignificativas in ſe invicem duci, & producto præponi cifras duplo plures, quàm ſint in A radice. Ergo productum, hoc eſt, ut patet ex def. XXVIII. lib. VII., ipſe quadratus B pares habet in principio cifras.

A	230
A	230
52900	B

Si non habet cifras in principio, ut C; tum ut C ducatur in C, debet prima nota 9, quæ jam ponitur non cifra eſſe, ſed nota ſignificativa, duci in ſeipſam, ut habeatur ejus quadratum, cujus prima nota

C	439
C	439
192721	D

Digitized by Google

nota in primo loco producti D scribenda est. Atqui nullius notæ simplicis quadratum primam notam habet cifram, ut patet ex tabella Cap. præced. Ergo neque quadrati D, qui pro cujusvis radicis compositæ quadrato supponitur, nota prima erit cifra. Omnis igitur quadratus numerus, aut pares habet in principio cifras, aut ejus prima nota omnino cifra non est. *Q. E. D.*

Corollarium.

Simili ratione ex ipso opere multiplicationis manifestum est, nullius quadrati numeri primam notam esse 2, vel 3, vel 7, vel 8, sed unam ex his 1, 4, 5, 6, 9, 0. Nam prima cujusvis quadrati nota prima eadem est cum alicujus quadrati simplicis notâ primâ, quæ necessariò est una ex his 1, 4, 5, 6, 9, 0.

PORISMA II.

P	a	b	c
	56,	30,	09
	d	e	
	49	00,	00
		k	
	7	0	0
	7,	0	0
	f,	k	

Esto numerus quicumque P, *a dextra in sinistram in membra, seu partes* a, b, c *distinctus, commate post binas quasque notas interposito. Assumatur autem quodlibet membrum, exemp. gr. ultimum* a, *& quadratus in eo simpliciter accepto delitescens sit* d, *ejusque radix* f. *Dico, si ante* d *ponantur tot cifrarum binarii, quot ante membrum* a *membra antecedunt; ante* f *radicem verò toties*

ties una cifra : d, e *fore quadratum latentem in membro* a, *juxta valorem loci accepto, & radicem ejus esse* f, K.

Demonstratio.

CUm enim pro singulis membris ante *f* posita sit una cifra, ante *d* verò cifrarum binarius; manifestum est, cifras *e* esse duplo plures cifris *k*. Ergo *k*, *f* radix in se ducta faciet *d*, e; nam ut *f*, *k* ducatur in *f*, *k*, tantum opus est *f* ducere in *f*, unde fit *d* ex hypothesi, & cifras *k*, *k* sibi mutuò apponere, quæ conflabunt cifras *e*, cum duplæ sint ipsarum *k*. Ergo *d*, *e* quadratus est, ejusque radix *f*, *k*. Liquet ergo quæsitum.

Corollaria.

HInc patet I. in quolibet membro latere quadratum, & talem quidem, qualis in lemmate determinatur.

Patet II. cur numerus, ex quo quadrata radix elicienda est, secetur in membra binis notis constantia; & cur postremum membrum possit unic esse nota, quæ quidem ex sequentibus patebunt adhuc clariùs.

PORISMA III.

QUadratum binomii a + b, *sive numeri in duas partes secti, est* aa + aab + bb. *Hoc est quadratus ex* a, *& planus ex* a *in* b *bis sumptus, & quadratus ex* b.

Pa-

Patet ex Prop. IV. l. II. Id ipsum cernitur ex opere ipso multiplicationis speciosæ, cujus paradigma appono.

	a b	a b	
a+b	20+3	2 3	20 a
a+b	20+3		3 b
aa+ab	400+60		
+ab+bb	+60+9		

Sum. aa+2ab+bb=400+120+9.

Porro hæc multiplicatio nihil habet difficultatis; nam ut $a+b$ ducatur in $a+b$, prima a multiplicans totum $a+b$, producit $aa+ab$. Deinde $+b$ multiplicans idem totum $a+b$, producit $+ab+bb$. Hæc duo producta addita faciunt $aa+2ab+bb$. Quæ omnia per se manifesta sunt.

PORISMA IV.

Esto numerus Z, quotcumque constans partibus, ex. gr. tribus, a+b+c. *Ejus quadratum est* aa+2ab+bb+2ac+2bc+cc; *hoc est quadratum ex* a, *planus bis ex* a *in* b; *quadratum ex b; planus bis ex* a+b *in* c; *quadratum ex c.*

De-

Demonstratio.

PEr Porisma præcedens quadratum ex	a, b, c 2 3 5 Z	a. 200. a + b + c b. 30. 200 + 30 + 5 c. 5.

$a+b+c$ æquatur quadrato ex $a+b$, per modum unius partis accepto, & bis facto ex $a+b$ in c, & quadrato ex c. Atqui quadratum ex $a+b$, per idem Porisma, est quadratum ex a, unà cum bis facto ex a in b, unà cum quadrato ex b. Ergo quadratum ex $a+b+c$ æquatur quadrato ex a, bis facto ex a in b, quadrato ex b, bis facto ex $a+b$ in c, quadrato ex c. *Q. E. D.*

Corollarium.

QUadratum igitur numeri in suas partes dirempti componunt partium quadrati, & dicti plani.

PORISMA V.

QUadratus esto quivis A, ejusque radix B. Sit autem quadratus A sectus in membra, binis notis constantia, a dextrâ in sinistram.	A 56, 70, 09 A 1, 82, 25, 00	B (753 B (1350

***Dico**, radicem B tot constare notis, quot sunt membra in quadrato A.*

P Dè-

Demonſtratio.

PEr Poriſma II., ejuſque Coroll. quoniam in ſingulis membris dati A latet unus quadratus; patet, tot eſſe membra in A, quot in A latent quadrati. Sed quia per Poriſma III., & IV., ejuſque Coroll. in quadrato toto A ſingularum notarum radicalium quadrati continentur; tot etiam notas continebit radix B, quot in A ſunt quadrati. Ergo radix B tot continebit notas, quot ſunt membra in A. *Q. E. D.*

PORISMA VI.

ESto numerus quadratus quicumque Z, *ejuſque radix quadrata* X. *Secetur autem* Z *in membra* h, g, f, e, *à dextrâ in ſiniſtram, poſt binas quaſque notas commate interpoſito.*

Z e f g h 55, 33, 87, 21	{ abcd 7439 X
e 55, 00, 00, 00	a. 7000
f 6, 33, 00, 00	b. 400 c. 30
g 57, 87, 00	d. 9
h 1338, 21.	a + b + c + d 7000 + 400 + 30 + 9

In ultimo membro *e* latet quadratus ſolus ultimi radicis ſegmenti *a*. In penultimo membro *f*, unà cum reſiduo 6 membri ultimi *e*, latet quadratus penultimi radicis ſegmenti *b*, unà

unà cum bis facto ex *a* in *b*. In antepenultimo membro *g*, unà cum reſiduo 57 membri *f*, latet quadratus antepenultimi radicis ſegmenti *c*, unà cum bis facto ex $a+b$, hoc eſt ex *a*, & *b* in *c*. In membro *h*, unà cum reſiduo 1338 membri *g*, latet quadratus radicis ſegmenti *d*, unà cum bis facto ex $a+b+c$, hoc eſt ex *a* cum *b*, & *c*, in *d*. Et ſic deinceps, ſi plura ſint membra.

Z	e f g h 55, 33, 87, 21	{ abcd 7439	X
	e 55, 00, 00, 00	a. 7000	
	f 6, 33, 00, 00	b. 400 c. 30	
	g 57, 87, 00	d. 9	
	h 1338, 21.	a + b + c + d 7000 + 400 + 30 + 9	

Demonſtratio.

Cum enim per Poriſ. V. tot notis conſtet radix X, quot ſunt membra in Z, in ſingulis autem membris, ut patet ex Poriſ. III. & IV., ejuſque Corol. lateat quadratus unius ſegmenti radicis; manifeſtum eſt, ſegmenti radicis ultimi *a*, ac proinde maximi quadratum contineri in membro ultimo, adeoque & maximo *e*, & ſic deinceps. Ex quo etiam per eadem III., & IV. Poriſ. patet de planis, ſive bis factis ex &c. Conſtat ergo quæſitum.

Digitized by Google

HIS PRÆMISSIS

EOrum omnium, quæ ad radicis quadratæ extractionem præcedentiCapite præscripta sunt, ratio dabitur. Resumatur exemplum Cap. præced., in quo ex numero A extracta est radix Z.

I. Quia per Porif. VI. in ultimo membro *e* latet quadratus segmenti radicis ultimi; idcirco elicitur ex membro *e* radix quadrata, quàm potest maxima, reponiturque post lunulam: quadratus verò illius a membro *e* subtrahitur, & residuum scribitur infra lineam. Et quia per VI. Porif. in membro ultimo continetur quadratus solus segmenti, seu partis ultimæ radicis, in reliquis verò membris, præter quadrata partium radicalium, continentur etiam numeri rectanguli, seu plani; idcirco hæc operatio prima soli postremo membro convenit. Insuper, quod ex membro *e* elicita sit radix *a*, neglecto loci valore, nimirum ac si esset tantum 56, cum reverà sit 56, 00, 00, id, quemadmodum in aliis plerisque operationibus arithmeticis, compendii gratiâ factum est.

A	e f g 56,70,09	{abc 753	Z
	49		
h	7,70, . .	a 700	14. 00. m
	7 25, . .	b 50	
	———	c 3	
	K 45,09		
	45,09.		

II. Quod verò interim nota radicalis *a*, sic inven-

inventa, ſit legitima, ſic oſtendo. Cum per V. Poriſ. radix tota Z tot conſtet notis, quot totus A membris, patet ante membrum *e* tot eſſe membra, quot ante *a* ſunt notæ. Quia igitur ſingula membra *f*, *g* duabus conſtant notis, tot ante *e* membrum præcedunt notarum, ſive locorum binarii, quot ante *a* præcedunt notæ, ſeu loca. Quare cum nota *a* ſimpliciter accepta per conſtr. ſit radix quadrati latentis in membro *e* 56 ſimpliciter accepto, erit quoque per Poriſma II. *a* accepta juxta loci valorem (nempe 700) radix quadrati latentis in membro æſtimato ex loci valore nempe in 56, 00, 00. Hoc ipſum in reliquis membris eodem prorſus modo demonſtrabitur.

III. Ex membris penultimo, cæteriſque, quotquot fuerint, notæ radicales reliquæ eliciuntur artificio a priori planè diverſo. Ad illius rationem penitus perſpiciendam juvabit non parum ob oculos ponere radicis binomiæ *a*+*b* quadratum, quod per Poriſma IV. eſt

$$aa+2ab+bb.$$

Hujus poſtrema pars *aa* indicat, in ultimo membro *e* latere quadratum ultimi radicis ſegmenti, ſeu notæ *a*: reliquæ vero partes 2*ab*+*bb* indicant, quid contineatur in membro penultimo *f* cum prioris *e* reſiduo, aliiſque ſingulis. Quia igitur in membro *f* cum reſiduo prioris, hoc eſt in *b* (7, 70, ſeu 770, 00) continetur 2*ab* +*bb*, hoc eſt planus bis genitus ex ultimo radicis ſegmento, ſeu nota *a* jam cognita, in *b* adhuc incognitam, unà cum quadrato ipſius *b*, ut patet ex Lem. VI., manifeſtum eſt,

 in-

incognitam radicis notam b ex hoc membro b esse eliciendam; utique per divisionem, quæ sola resolvit, quod multiplicatio composuit. Cum verò latera membrum b producentia sint a, & b, in divisorem illud erit assumendum quod cognitum jam est, nempe a, & quidem duplicatum, eo quod in membro b contineatur planus bis factus ex a in b, hoc est planus ex a bis sumpto in b. Atque hæc causa est, cur ad constituendum divisorem radix eatenus acquisita duplicetur.

A.	e f g 56,70,09	$\left\{\begin{matrix} abc \\ 753 \end{matrix}\right.$ Z	
	49		
	h7,70 . .		a. 700
	7 27 . .		b. 50
			c. 3
	K 45,09		
	45,09	a + b + c 700 + 50 + 3	

IV. Per hunc autem divisorem $2a$ (14) dividitur non totum membrum b (7, 70) sed demptâ notâ primâ, nimirum 77 tantum, hac de causâ. Ut innotescat nota incognita b, solus planus $2ab$, factus nimirum ex a bis in b, dividendus est; cum ad hoc nihil faciat bb, utpote totus incognitus. Nihil autem plani $2ab$ ad primum membri b locum pertinet, ut infra demonstrabitur num. VI.

V. Reperta jam porro per divisionem nota incognita b multiplicat & duplum notæ prioris a, ipsum nempe divisorem $2a$ (14), & seipsam, ut habeantur duo producta $2ab+bb$ (70, & 25;

& 25), quæ in membro *b* continentur, & ab eodem idcirco subtrahuntur. Quorsum verò fiat hæc subtractio, patebit ex clausulâ totius demonstrationis.

VI. Cur autem producta ex multiplicatione scribantur, ut in appositâ formulâ, ratio est, quod 70, hoc est 2 *ab*, fiat ex divisore 2*a* in *b*; & 25, hoc est *bb*, fiat ex *b* in *b*.

	70...
	25..
	725..

Unde cum *a* sit nota radicis uno loco altior, quàm *b*, etiam producti 2*ab* (70) prima nota, ut patet ex Poris. VI. C. III. l. I. uno loco altior erit, quàm prima nota producti 25 ex *b* in *b*, ideoque scribenda supra 2 secundam notam quadrati *bb* 25. Ex quo etiam manifestum fit, id quod supra assumptum fuit, videlicet nihil plani 2*ab*, hoc est 70, pertinere ad locum primum membri *b*. Nam cum duo illa producta adduntur, quadrati *bb* (25) prima nota reponitur in primo loco summæ 725, plani verò 2*ab* (70) prima nota pertinet ad locum summæ secundum. Et quia summa 725 tot constat notis, quot membrum *b*, utpote per Porisma VI. in eo latens, adeoque ab illo subtrahenda; manifestum est, plani 2*ab* (70) primam notam pertinere ad locum membri *b* secundum; ac proinde, cum solus planus 2*ab* (70) dividendus sit, membrum *b* demptâ primâ notâ dividitur.

Porro valorem verum productorum exprimit hæc formula altera, quem inter operandum citra veritatis præjudicium dissimulari, liquet ex demonstratis supra.

	70000
	2500
	72500

VII. At quare hæc operatio in aliis deinceps

ceps membris semper eadem repetitur? Ratio patet ex VI. Porismate. Quemadmodum enim in membro b, composito ex f, & residuo prioris, latet $2ab+bb$, hoc est planus bis ex notâ radicali a in radicalem b, unà cum quadrato ipsius b; ita in membro k, composito ex g. & 45 prioris f residuo, latet $2ac+abc+cc$, hoc est planus bis ex $a+b$ radice eatenus acquisitâ ductâ in c, & quadratum ipsius c: & sic deinceps in reliquis membris, si quæ essent plura.

VIII. Postremò quæritur, quare, cum membrum ultimum est 1, vel 2, vel 3, pro radicali notâ scribatur unitas. Esto quadratus A, cujus membrum ultimum est b, 3, 00, 00; radix autem sit Z, cujus membrum ultimum sit unitas.

b	Z
3, 96, 01	199.
A	100.

Quia radix Z tot habet notas, per Porism. V., quot A membra; habebit 1 ante se tot cifras, quot ante ultimum b sunt membra. Sed quot sunt membra ante b, tot ante notam 3 sunt cifrarum binarii, ut habeatur ejus valor 3, 00, 00. Ergo, ut habeatur valor ultimæ notæ ipsius Z, quæ est 1, ante eam tot ponendæ sunt cifræ, quot ante 3 cifrarum binarii; ac proinde ante 3 sunt cifræ duplo plures, quam ante 1. Ergo quadratum ipsius unitatis, ex valore loci æstimatæ, erit 1 cum tot cifris, quot sunt ante 3. Ergo continetur in 3, 00, 00, ab eoque auferri debet. Ex quo patet quæsitum.

IX. Explicatis hunc in modum, ac demonstratis singulis partibus extractionis quadraticæ, demonstratio tota sic concluditur.

Nu-

Google

Numerus datus A æqualis est quadrato ex *a*; plano ex *a* bis in *b*; quadrato ex *b*; plano ex *a* + *b* bis in *c*; quadrato ex *c*, ut patet ex toto opere extractionis, cum dictæ quantitates subtractæ fuerint ex A, nec quidquam subtractione ultimâ peractâ superfuerit. Atqui, per Porisf. IV. etiam quadratus radicis Z iisdem æqualis est. Ergo A est ipse quadratus radicis Z. *Q. E. D.*

e f g	abc Z
A 56, 70, 09	753
a 700	
b 50	
c 3	

Quod si ultimâ subtractione peractâ superfuisset quidpiam, tunc numerus datus, illo residuo mulctatus, fuisset æqualis dictis quantitatibus ac proinde, & radicis inventæ quadratus.

CAP. III.

Radicis cubicæ extractio.

Extrahenda sit radix cubica ex numero A.

A 102, 503, 302 (4
64
—
38

I. Post ternas quasque notas, initio facto a dextris, comma aut punctum interpone; eritque numerus datus A sectus in partes, seu membra ternis notis constantia, præter ultimum, quod constare potest notis, vel duabus, ut in C; vel etiam unicâ, ut in D.

39, 820, 439. C
7, 900, 341. D

Tot

Digitized by Google

Tot verò notis conſtabit radix quæſita, quot erunt numeri dati membra, ut infra demonſtrabitur.

Rad.	Qua.	Cubi
1	1	1
2	4	8
3	9	27
4	16	64
5	25	125
6	36	216
7	49	343
8	64	512
9	81	729

II. Præſidio tabellæ hìc appoſitæ, qua notarum ſimplicium cubi continentur, quære poſtremi membri radicem cubicam, aut ſi id cubus non eſt, quære radicem cubi proximè minoris.

Ut, quia hìc poſtremum membrum 102 cubus non eſt, quære cubum proximè minorem 64. Hujus radicem 4 ſcribe poſt lunulam, quæ erit nota ultima radicis quæſitæ; cubum verò ipſum 64 aufer a poſtremo membro, & reſiduum 38 infra lineam repone. Hæc operatio ſoli poſtremo membro convenit, ac proinde in membris ſequentibus non reperitur.

III. Reſiduo 38 adſcribe membrum penultimum 503, ut fiat membrum totale novum 38, 503: pro quo diviſor ſic parabitur.

A

102, 503, 232 (46
64
—
38, 503
33, 336
—
5, 167

Radicis hactenus acquiſitæ 4 quadratum 16 triplica: fit 48. Tum ipſam quoque radicem 4 hactenus acquiſitam triplica: fit 12. Producta

cta adde, numeris collocatis, ut in hac formulâ. Summa 492 erit divisor.

Quære igitur, quoties divisor 492 contineatur in membro 38, 503, demptâ primâ notâ, hoc est in 3850. Reperies contineri sexies. Scribe ergo 6 post lunulam, quæ erit nota penultima radicis quæsitæ.

48
12
——
492

Tum nota radicalis ultimò reperta 6, multiplicans primò radicis prioris 4 quadratum ter sumptum, nempe 48, faciat 288. Deinde radicis ultimò repertæ quadratum 36, multiplicans triplum radicis prioris 4, nempe 12, faciat 432. Denique 6, seipsam cubicè multiplicans, faciat 216.

Hæc tria producta adde, numeris collocatis, ut in hac formulâ. Summam 33336 aufer a membro 38, 503, & residuum 5167 infra lineam repone.

288
432
216
——

IV. Hæc operatio, toto jam numero tertio exposita, in omnibus membris sequentibus eodem modo, atque ordine repetitur.

Itaque residuo 5167. adscribe membrum proximum 232, ut habeatur membrum novum totale 5167, 232. Radicis 46, hactenus acquisitæ, quadratum 2 1 1 6 triplica: fit 6 3 4 8. Radicem quoque ipsam 46 triplica: fit 138. Hæc duo producta in unam summam collige, numeris, ut in hac formulâ, collocatis. Summa est novus

6348
138
——
63618

vus divisor. Quære igitur, quoties hic contineatur in novo membro 5167, 232, demptâ primâ notâ, nempe in 5167, 23. Reperies contineri octies. Scribe ergo 8 post lunulam. Erit hæc nota prima radicis quæsitæ. 8 in 6348, triplum nempe quadrati radicis prius acquisitæ 46, facit 50784: quadratum ex 8, nimirum 64, in 138, triplum radicis prioris 46, facit 8832. 8 in 8 cubicè est 512. Hæc tria producta adde, numeris, ut in appositâ formulâ, ordinatis. Summam 5167232 aufer ex membro 5167232, & nihil restat.

```
        A
102,503,232(468
 64
 —
 38,503
 33 336
 ———————
  5,167,232
  5,167,232.
 ———————
          0
```

```
50784
 8832
  512
———————
5167232
```

Numerus ergo A cubus est, ejusque radix 468. Quod si post ultimam subtractionem aliquid superfit; numerus, qui proponitur, non erit cubus: fit autem cubus, si mulctetur residuo.

V. Quæ num. V. VI. VII. Cap. I. notantur pro quadratæ radicis extractione, etiam in extractione radicis cubicæ erunt observunda.

C A P. I V.

Cubicæ radicis demonstratio.

Præmitto etiam hic Porismata quædam, ex quibus Theoria tota extractionis cubicæ fiet manifesta.

PO-

PORISMA I.

Cubus numerus, aut nullas in principio habet cifras, aut si habeat, eas ternarius metitur.

Demonstratio.

Nam radix quæcumque, cubum generans, vel habet in principio cifras unam, aut plures, vel non habet. Si non habet, tum, ut A, (sic eam lubet vocare) multiplicetur cubicè, debet prima ejus nota in se duci cubicè, & cubi producti prima nota scribi infra lineam primo loco in producto quæsito, sive cubo totius radicis A, ac proinde cujuscumque cubi prima nota convenit cum primâ notâ alicujus cubi simplicis. Atqui nullius cubi simplicis prima nota est 0. Ergo &c. Quod si radix in principio habeat cifras, quemadmodum B, ex ipso multiplicationis opere manifestum est, ut B ducatur in se cubicè, tantùm opus esse, ut cubo notarum significantium præponantur cifræ triplo plures, quàm sint in principio radicis B. Ergo, &c.

	239
A	
B	580
C	195112000

Corollarium.

Ex demonstratis patet, cujusvis cubi primam notam convenire cum primâ notâ alicujus cubi simplicis.

PO-

PORISMA II.

Esto cubus quicumque a, *ejusque radix cubica* c. *Cubo autem tot præponantur cifrarum terniones* b, *quot cifræ* d *radici*. ***Dico etiam totum*** **c, d** ***esse radicem cubicam totius*** **a, b.**

a		b
64	1	000 , 000
c		d
4	1	00

Demonstratio.

UT habeatur cubus ex *c*, *d* tantum opus est *c* multiplicare cubicè, & producto *a* præponere cifras triplo plures, quàm sint *d*. Atqui cifræ *b* sunt triplo plures per hypothesim. Ergo *a*, *b* est cubus ex *c d*.

Corollaria.

I. HInc patet, si numerus quivis sit divisus in membra, tribus notis constantia, dempto ultimo *a*, quod paucioribus constare potest, & membri cujuspiam puta *a*, simpliciter accepti, radix cubica sit *c*: si ante radicem *c* ponantur tot cifræ *d*, quot ante *a* sunt membra *e*, *k*, seu locorum terniones *b*, etiam *c*, *d* fore radicem cubicam ipsius *a*, *b*, seu membri *a* juxta loci valorem accepti.

a	e	*k*
64 ,	230 ,	789
a	b	
64 ,	1 000 ,	000
c	d	
4	1 00	

II. Ex his manifestum est, in quolibet membro

bro latere cubum, & talem quidem, qualem jam determinavimus.

III. Atque ex his jam incipit apparere, cur ad extrahendam radicem cubicam, post ternas quasque notas comma interponatur, & cur non intersit, sive membrum ultimum unicâ constet notâ, sive duabus.

PORISMA III.

Cubus binomii a + b *hoc est lineæ, seu numeri in duas partes secti, est*
$aaa + 3aab + 3abb + bbb$.

Hoc est, cubus binomii a+b *æquatur cubo ex* a; *solido ter sumpto, quod fit ex quadrato ipsius* a *ducto in* b; *solido ter sumpto, quod fit ex quadrato ipsius* b *ducto in* a; *cubo ex* b.

$$\begin{array}{l} a+b \\ a+b \\ \hline aa+ab+bb \\ \quad\;\; ab \\ \hline a+b \\ \hline aaa+aab+abb+bbb \\ \qquad\;\; aab \;\; abb \\ \qquad\;\; aab \;\; abb \end{array}$$

hoc est; $aaa+3aab+3abb+bbb$.

De-

Demonstratio.

PAtet ex ipso actu multiplicationis cubicæ, cujus paradigma hìc apponitur, & per se est manifesta.

Id ipsum demonstratur in schemate hìc adjuncto. Cubus enim *d l* rectæ *c d*, sectæ in duas partes *a*, & *b*, complectitur cubos segmentorum *a*, & *b*, cubos nimirum *c e n o f q r p*, & *o s* 3 *m* 2 5 1 *u*: item tria parallepipeda æqualia, quorum bases sunt quadrata *po*, *ro*, *eo* æqualia quadrato *rp* seu *aa*, altitudines verò *px*, *b*, seu *rd*, *ek*, quæ omnes sunt æquales ipsi *b*: item tria parallepipeda æqualia, quorum bases sunt quadrata o1, o2, o3, æqualia quadrato 7 *y* seu *bb*, altitudines verò 57, 58, 3*l*. æqualia ipsi *a*.

Hæc quidem, utpote vel mediocriter Elementa Geometriæ callentibus satis nota, non est necesse pluribus demonstrare.

PORISMA IV.

E*Sto numerus* Z *diremptus in partes suas, quotcumque illæ fuerint*, a+b+c. *Ejus cubus æquatur his quantitatibus: cubo ex* a, *solido ter genito ex quadrato ipsius* a *in* b; *solido ter genito ex quadrato ipsius* b *ducto in* a; *cubo ex* b; *(omnes has quantitates vocabo* M *) item solido ter genito ex quadrato ipsius* a+b *ducto in* c; *solido ter genito*

a b c			
9 2 5	a	900	a+b+c
Z	b	20	900+20+5
	c	5	

genito ex quadrato ipsius c *ducto in* $a+b$; *cubo ex* c: *quas quantitates posteriores vocemus* N.

Demonstratio.

SUmendo enim $a+b$ per modum unius, erit per Porism. III. cubus ex $a+b+c$ æqualis cubo ex $a+b$, & quantitatibus N. Atqui per idem Porisma cubus ex $a+b$ æquatur quantitatibus M. Ergo cubus ex $a+b+c$ æquatur quantitatibus M, & quantitatibus N. *Q. E. D.*

Corollarium.

CUbum igitur numeri in suas partes secti componunt singularum partium cubi, & dicti solidi.

PORISMA V.

102, 503, 232	(468 Z
X	abc
	a. 400
	b. 60
	c. 8

CUbus esto quivis X, ejusque radix Z. Sit autem cubus X sectus in membra, post ternas notas a dextra in sinistram commate interjecto. Dico, radicem Z tot constare notis, quot membra sunt cubi dati.

Demonstratio.

QUoniam per Coroll. II. Porism. II. in singulis membris latet unus cubus; tot erunt

membra in X, quot cubi. Sed quia, per Porism IV., ejusque Coroll., in cubo X continentur cubi singularum radicis partium *a*, *b*, *c*; tot etiam erunt radicis partes, ac proinde & notæ, quot in X sunt cubi. Ergo radicis Z tot sunt notæ, quot membra cubi dati X. *Q. E. D.*

PORISMA VI.

```
   f    k    m      abc
X 102, 503, 232    (468 Z
   f                              400+60+8
  102, 000, 000                   a  +b +c
         k            a 400
     38, 503, 000     b  60
              m       c   8
      5, 167, 232
```

I*Isdem positis, dico, in membro ultimo* f *latet cubus solus ultimi radicis segmenti* a.

In penultimo membro k, unà cum 38 *residuo membri* f, *latet solidus numerus ter genitus ex quadrato ipsius* a *ducto in* b; *& solidus ter genitus ex quadrato ipsius* b *ducto in* a; *& cubus ipsius* b.

In membro m, *unà cum* 5167 *residuo membri k, continetur solidus ex quadrato ipsius* a+b, *id est* a *cum* b, *terducto in* c; *& solidus ex quadrato ipsius* c *ter ducto in* a+b; *& cubus ipsius* c.

De-

Digitized by Google

Demonstratio.

CUm enim per Porisma V. radix Z tot constet notis, adeoque & segmentis, quot sunt membra in X; in singulis autem membris, ut patet ex Porism. III. & IV., ejusque corollario, lateat cubus alicujus segmenti radicis: manifestum est, segmenti radicis ultimi *a*, adeoque & maximi, cubum latere in membro *f* ultimo, ac proinde maximo; & sic deinceps Ex quibus etiam, & per III. ac IV. Poris. patet de solidis. Constat ergo quæsitum.

HIS PRÆMISSIS.

JAm ratio dabitur eorum omnium, quæ superiori capite ad extrahendam radicem cubicam fuere præscripta.

I. Resumatur exemplum cap. præced. Quia

```
      f    k    m                         abc
  X 102, 503, 232                        (468 Z
     64  . . .  . . .
     ——
   n 38, 503 . . .                        a 400
     33  336 . . .                        b  60
   ————————                               c   8
   P  5, 167, 232
      5, 167, 232
     ——————————
               o              a + b + c
                              400+60+8
```

per VI. Porisma in postremo *f* membro nihil

 conti-

continetur aliud, quàm cubus ſegmenti radicis ultimi, idcirco ex membro *f* elicitur radix cubica, quàm poteſt maxima *a*, eaque poſt lunulam reponitur, radicis quæſitæ futura poſtremum ſegmentum, ſeu nota ultima: cubus verò ejus ſubtrahitur a membro *f*, reſiduo 38, ſi quod ſit, infra lineam notato. Quia autem in reliquis membris omnibus, præter cubos reliquorum ſegmentorum radicis, continentur in ſingulis præterea ſex ſolidi; idcirco hæc operatio ſoli poſtremo membro convenit, & in ſequentibus membris non repetitur.

II. Quod verò nota radicalis *a* ſit legitima, licèt extracta ſit ex membro *f* ſimpliciter accepto, hoc eſt loci valore diſſimulato; ſic oſtendo. Tota radix Z tot conſtat notis, quot X numerus datus membris, per Poriſm. V. Quare cum ſingula membra *k*, *m* tres contineant notas, ante *a* erunt tot notæ, ſeu loca, quot ante *f* locorum terniones. Ergo cum per conſtruct. *a* nota ſimpliciter accepta, ſit radix cubi latentis in membro *f* ſimpliciter accepto; *a* quoque, ex loco æſtimata, erit per II Poriſm. radix cubi latentis in membro *f* ex loci valore æſtimato. Hæc demonſtratio etiam valet in reliquis membris, in quibus compendii gratiâ, quemadmodum in pleriſque arithmeticis operationibus, loci valor diſſimulatur, nullo, ut jam oſtendi, præjudicio veritatis.

III.

	f	k	m		abc
X	102,	503,	232		(468 Z
	64	. . .	. . .		
n	38,	503	. . .		a 400
	33	336	. . .		b 60
					c 8
P	5,	167,	232		
	5,	167,	232		
			0		$a+b+c$
					$400+60+8$

III. Reliquæ radicis notæ artificio inter ſe uno quidem, ſed a priori penitus diverſo, reperiuntur. Illius rationi aperiendæ plurimum conducet, cubum binomii $a+b$ ante oculos proponere, qui per Poriſm. III. eſt

$$aaa+3aab+3abb+bbb.$$

Hujus poſtrema pars *aaa* oſtendit, in ultimo membro *f* latere ſolum cubum notæ ultimæ radicis: reliquæ partes oſtendunt, quid contineatur in membro penultimo *n*, conſtante ex 38, reſiduo membri *f*, & *k*, de quo jam agitur, ac in reliquis deinceps omnibus. Quia igitur, ut patet & ex formulâ hac, & ex VI. Poriſmate, in membro *n* continentur ſolidus ter genitus ex quadrato notæ radicalis jam repertæ *a*, ducto in *b* adhuc incognitam; item ſolidus ter factus ex quadrato ejuſdem *b* in *a*; item cubus ejuſdem *b*: manifeſtum eſt, notam illam penultimam, ſeu ſegmentum *b* radicis adhuc incognitum,

tum eliciendum esse ex membro *n* dati numeri penultimo, utique per divisionem, quæ sola resolvit, quod composuit multiplicatio.

Quia verò latera, membrum *n* producentia, partim cognita sunt, partim incognita, ad constitutionem divisoris assumenda erunt sola cognita, nimirum $3aa$, & $3a$, hoc est triplum quadrati notæ radicalis jam inventæ *a*, nempe 48, & triplum ejusdem *a* nempe 12; quæ in unam summam collecta dant divisorem 492.

48
12
492

IV. Per hunc autem, ut eruatur nota radicis latens *b*, dividitur non totum membrum *n* 38, 503, sed demptâ notâ primâ, nimirum 38, 50 hac de causâ. Quoniam divisor 492 constans ex $3aa + 3a$, nullo modo pertinet ad cubum *bbb*, utpote qui producatur ex solâ notâ incognita *b*; patet, per hunc dividi oportere tantum solidos $3aab + 3abb$ supradictos. Nihil autem ex hisce solidis ad notam, seu locum membri *n* primum pertinet, ad quem se extendit cubus genitus ex *b*, quemadmodum ex iis apparebit, quæ mox subjungam num. VII.

V. Reperta porro per divisionem nota radicalis *b* ducitur in triplum quadrati ex *a*, & quadratum ipsius *b* ducitur in triplum ipsius *a*, ac demum *b* in se ducitur cubicè, ut habeantur tria producta $3aab + 3abb + bbb$, quæ in membro *n*, per Por. VI. continentur, atque idcirco ab eodem auferuntur. Quorsum verò fiat hæc subtractio, liquebit ex clausulâ totius demonstrationis.

VI.

3aa	48
3a	12
	——
	492

VI. Cur autem $3aa + 3a$ hoc est triplum quadrati ipsius a, & triplum ipsius a, quæ divisorem constituunt, ordinari debeant juxta hanc formulam; item cur tria producta $3aab + 3abb + bbb$, hoc est solidus ex triplo quadrati notæ radicalis a ducto in notam radicalem b, unà cum solido ex triplo a in quadratum ipsius b, unà cum cubo ipsius b, scribantur juxta formulam hanc alteram:

288	3aab
432	3abb
216	bbb
——	
33336	

restat nunc, ut breviter demonstremus. Et quidem quod attinet ad partes divisoris $3aa + 3a$ manifestum est, quadratum ipsius a uno loco, seu gradu attolli altiùs, quàm a: ideoque 8, prima nota ipsius $3aa$, 48, ponenda supra 1, secundam notam tripli ipsius a, id est 12. Quod attinet ad tria producta, quia $3abb$ fit ex $3a$ in bb, & cubus bbb fit ex b in bb, estque a nota radicis uno loco altior, quàm b; manifestum est ex Porism. VI. C. II. lib. I. solidi $3abb$, hoc est 432, primam notam 2 etiam uno loco altiorem esse primâ notâ cubi bbb, 216; ideoque scribendam supra 1, notam secundam cubi bbb, 216. Rursum, quia solidus $3aab$ fit ex $3a$ in ab, solidus autem $3abb$ fit ex $3a$ in bb (gignitur enim tam $3aab$, quàm $3abb$ ex lateribus quocumque inter se ordine multiplicatis, ut demonstravi in schol. XVIII. lib. VIII.) estque a nota radicis uno loco altior, quàm b; manifestum est solidi $3aab$, hoc est 288, primam notam 8 uno quoque loco altiorem esse primâ notâ solidi $3abb$, hoc est 432: ideoque scriben-

bendam ſupra ſolidi 432 notam ſecundam 3. Atque hæc dictæ collocationis eſt ratio adæquata.

VII. Ex qua etiam cernitur, quod ſupra n. IV. aſſumptum fuit, nihil ex ſolidis 3*aab*, & 3*abb* pertinere ad notam primam membri *n*.

	f	*k*	m		abc
X	102,	503,	232		(468 Z
	64	...	...		
n	38,	503	...		a 400
	33	336	...		b 60
					c 8
P	5,	167,	232		
	5,	167,	232		
			o		a+b+c
					400+60+8

Nam ſi tria illa producta ſic collocata addantur, patet cubi 216 primam notam 6 reponi in primo loco ſummæ 33336, ſolidos verò 3*abb*, & 3*aab*, hoc eſt 432, & 288 totaliter pertinere ad loca ſummæ ſequentia. Et quia trium productorum ſumma 33336 æquè multis conſtat notis, ac membrum *n*, utpote per Poriſma VI. in eo latens, adeoque ab illo ſubtrahenda; manifeſtum eſt, nihil quoque ex ſolidis 3*aab*, & 3*abb* contineri in primo membri loco; ac proinde cum dicti ſolidi ſoli ſint dividendi, ut oſtendi num. III. dividitur membrum *n* demptâ notâ primâ.

Por-

Porro trium productorum valorem verum exprimit hæc formula, quem in operando dissimulatum esse sine veritatis præjudicio, liquet ex supra demonstratis n. II.

28800, 000
4320, 000
216, 000
33336, 000

VIII. Reliquum est, ut dicamus, cur ex membris cæteris eodem prorsus modo eliciantur radicales notæ reliquæ, quo ex penultimo. Causa est manifesta ex Porisf. VI. Quemadmodùm enim in membro penultimo n, composito ex 38 residuo membri f, & ex k, continebatur $3aab + 3abb + bbb$; hoc est solidus ex quadrato radicalis notæ a ducto ter in radicalem b, & solidus ex radicali a ter ductâ in quadratum radicalis b, & cubus ipsius b; ita in membro p, quod componitur ex 5167 residuo membri n, & ex m, continentur solidus ex quadrato radicis eousque acquisitæ $a+b$, hoc est a cum b, ter ducto in radicalem c, unà cum solido ex $a+b$ ter ducto in quadratum ipsius c, unà cum cubo ipsius c, quæ quantitates, si $a+b$ brevitatis causâ interpretemur per d, exprimuntur hac formulâ, $3ddc + 3dcc + ccc$, quæ formula per omnia similis est priori $3aab + 3abb + bbb$.

IX. Postremò quæritur, quare cum membrum ultimum est 1, vel 2, vel 3, pro radicali notâ scribenda sit unitas.

Esto cubus G, ejusque radix L. Quoniam per Porif. V. 1 in radice L tot ante se habet notas, seu loco, quot ante 3 ultimum membrum cubi dati antecedunt mem-

G 3, 307, 949

(149 L

Digitized by Google

membra; manifeſtum eſt hujus valorem eſſe 3, 000, 000, illius verò 100, ſic, ut 1 ante ſe tot habeat cifras, quot 3 cifrarum terniones. Atqui cubus numeri 100, nempe 1000, 000, tot etiam ante 1 habet cifrarum terniones, quot in radice 100 ſunt cifræ, ut patet ex actu ipſo multiplicationis. Ergo etiam cubus radicis 100 tot habet cifras, quot membrum 3, 000, 000. Ergo cubus ipſius 100, nempe 1, 000, 000, latet in membro 3, 000, 000, ac proinde 1 eſt vera radicalis nota, quæ ex ultimo membro 3 erat elicienda.

X. Explicatis hunc in modum, ac demonſtratis omnibus, quæ ad extrahendam e numero dato radicem cubicam fuere præcepta, demonſtratio tot ſic concluditur.

Numerus datus X, ut patet ex toto opere extractionis, æqualis eſt cubo ex a, ſolido ter ex quadrato ipſius a in b, ſolido ter ex a in quadratum ex b, cubo ex b; item ſolido ter ex quadrato ipſius $a + b$ in c, ſolido ter ex $a + b$ in quadratum ipſius c, cubo ex c.

	abc
102, 503, 232	(468 Z
X	
	a 400
	b 60
	c 8

Quæ quantitates, $a+b$ interpretando per d, ſpecioſè ſic exprimuntur.

$$aaa + 3aab + 3abb + bbb$$
$$+ 3ddc + 3dcc + ccc$$

At iiſdem quantitatibus per Poriſ. IV. æquatur cubus radicis Z, ſeu $a + b + c$. Ergo X eſt ipſe cubus radicis Z, ſive $a + b + c$. *Q. E. D.*

CAP.

Est autem numerus datus X æqualis quantitatibus supradictis, quia illæ omnes ab eo fuere subtractæ, nec quidquam ultimâ subtractione peractâ superfuit. Quod si aliquid superfuisset, tunc numerus datus, illo residuo mulctatus, fuisset æqualis quantitatibus dictis; ac proinde & cubus radicis inventæ.

C A P. V.

Cujuscumque radicis extractio.

QUadratam, & cubicam cæteræ omnis generis radices quadam proportione imitantur. Quemadmodum enim, ut ex cap. II. & IV. patuit, harum extractio ex generatione quadrati, ac cubi a radice binomiâ derivata est; ita & reliquarum quæque ex genesi potestatis suæ derivabitur. Itaque generale artificium radicis, e potestate datâ eliciendæ exhibent formulæ potestatum a radice binomiâ genitarum.

	0. Unitas.
Radix.	1. a + b.
Quad.	2. aa + 2ab + bb.
Cubus.	3. aaa + 3aab + 3abb + bbb.
Quadquad.	4. aaaa + 4aaab + 6aabb + 4abbb + bbbb.
Supersol.	5. aaaaa + 5aaaab + 10aaabb + 10aabbb + 5abbbb + bbbbb.
Quad. cub.	6. aaaaaa + 6aaaaab + 15aaaabb + 20aaabbb + 15aabbbb + 6abbbbb + bbbbbb.

Supersol.

Supersol. II. $7a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$.

Radix $a+b$ in se ducta gignit quadratum: hoc in radicem facit cubum: cubus in radicem facit quadratoquadratum: & sic deinceps, potestate quavis in radicem ductâ gignitur proximè altior. Potestates porro, ut liquet ex propositione VIII. lib. IX. ejusque scholio, sunt termini progressionis geometricæ, ab unitate incipientis, in qua quorum unaquæque potestas locum occupet, & quot habeat unaquæque dimensiones, indicant numeri singulis appositi, qui eâ de causâ exponentes appellantur. In postremâ formulâ brevitatis causâ $a\,7$ significat $aaaaaaa$: &c.

Reliquum est, ut qua ratione, per formulas jam dictas, cujusvis generis radicum extractiones dirigantur, exponamus.

Numerus datus, ex quo radix extrahenda est, a dextrâ in sinistram dividatur in membra, tot notis constantia, quot indicantur ab exponente potestatis, radicem extrahendam denominantis, præter membrum ultimum, quod constare potest paucioribus. Quoniam igitur quadratus duas, cubus tres habet dimensiones; in hoc post ternas, in illo post binas quasque notas comma interponitur. Quod si numerus datus minor sit, quàm, ut sic in membra dividi possit, quid tum facto sit opus, & quì radix data ex eo elicienda, dicetur Cap. VII.

Tum formula potestatis, radicem quæsitam denominantis, inspicienda. Hujus postremum nomen, sive particula continet operationem, postre-

postremo membro debitam: per reliquas omnes, membri penultimi, ac cæterorum extractio dirigetur. Quoniam igitur in postremâ particulâ continetur sola radicis quæsitæ potestas pura; elicienda erit ex membro ultimo numeri dati radix ejus generis, cujus petitur, quàm poterit maxima, præsidio tabellæ, continentis potestates simplicium numerorum 2, 3, 4, &c. quam eum in finem oportebit conficere. Reliquis deinde, ut Cap. I. & III. num. II. præscribitur, expletis, absoluta est operatio postremi membri.

In operatione membri penultimi, quæ & omnibus reliquis communis est, duæ sunt partes præcipuæ: prima inventio divisoris, per quem nova radicalis nota debet innotescere: secunda, quo modo nova nota radicalis, divisoris opera inventa, multiplicari debeat, ut habeantur producta, quæ a membro auferantur. Utrumque formulæ potestatum pulcherrimè exhibent, litterarum *a*, & *b* variâ conjunctione. Et *a* quidem significat quidquid ex radice eatenus acquisitum est, ac cognitum: *b* verò notam radicis designat adhuc incognitam, & proximè inveniendam. Inventionem divisoris indicant particulæ mediæ per litteras *a*, hoc est per id, quod in iis cognitum jam est: medias autem particulas voco omnes, demptâ primâ, & ultimâ. Multiplicationis modum præscribunt particulæ omnes, demptâ ultimâ, quam supra jam dixi soli primo membro inservire.

Itaque, quoniam in particulâ mediâ formulæ

læ quadrati habetur $2a$; radix, eatenus inventa, duplicata dabit divisorem. Rursum, quoniam in eâdem formulâ, demptâ ultimâ particulâ, habentur $2ab + bb$; oportebit divisorem, hoc est $2a$ ducere in b notam radicalem proximè inventam, & ipsam b in se ipsam.

Pari modo, quia in particulis mediis formulæ cubi habentur $3aa + 3a$; quadratum radicis eatenus inventæ triplicatum, & ipsa radix triplicata dabunt divisorem, sed eâ ratione dispositæ, ut præscribitur num. III. Cap. III. Rursum, quoniam in formulâ cubi, demptâ particulâ ultimâ, habentur $3aab + 3abb + bbb$; oportebit propter $3aab$, triplum quadrati radicis eatenus inventæ ducere in notam, jam proximè inventam b; & propter $3abb$, triplum ipsius radicis in quadratum ipsius b, & propter bbb, ducenda erit b cubicè in se ipsam.

Sed placet hujus methodi generalis exemplum dare in radice supersolidâ primâ, cujus nimirum potestas est dimensionum 5. Oporteat igitur radicem supersolidam primam extrahere ex numero X.

	d	c	a b
X	4591,	65024	(5 4
	3125		B
f	1466,	65024	
	1466	65024	
		0	

I. Quoniam hujus radicis potestas est 5 dimensionum; post quinque notas ponatur comma, eritque numerus X sectus in duo membra *d*, & *c*; ac totidem notis constabit radix.

II. Inspiciatur formula supersolidi. Quoniam

niam ultima ejus particula est *aaaaa*, oportet ex ultimo membro *d* elicere radicem superso-

$$\overset{6}{aaaaa} + \overset{5}{5aaaab} + \overset{4}{10aaabb} + \overset{3}{10aabbb} + \overset{2}{5abbbb} + \overset{1}{bbbbb}.$$

Formula supersolidi.

lidam. Præsidio igitur tabellæ, ad eum finem construendæ, ut simplicium Supersolidi contineantur, quæratur supersolidus ipsi membro *d* par, aut proximè minor. Is est 3125, ejusque radix 5, quam scribe post lunulam: potestatem verò 3125 aufer a membro *d*, residuo 1466 infra lineam notato. Hæc operatio soli postremo membro convenit.

III. Residuo 1466 adscribe membrum *c*, ut ex utroque fiat membrum novum totale *f*. Jam dictum supra, medias particulas, (quæ hìc sunt, secunda, tertia, quarta, quinta,) dirigere per litteras *a* divisoris inventionem. Quoniam igitur in quintâ reperis 5*aaaa*, radicis hactenus inventæ, quam designat *a*, biquadratus erit quintuplicandus, ut fiat *g*. Et quia in quartâ habetur 10*aaa*, oportebit cubum ipsius *a* decuplare, ut fiat *h*. Rursus, quia in tertiâ particulâ reperio 10*aa*, decuplandus erit quadratus ipsius *a*, ut fiat *k*. Tandem, quia in secundâ habetur 5*a*, quintiplicanda erit *a*, ut fiat *m*. Hi quatuor numeri, notis, ut hìc adjecta declarat formula, dispositis, in unam summam collecti, dabunt *n* divisorem, per quem tentanda est divisio membri *f*, ut innotescat proxima radicis nota 4 incognita, designata per *b*.

3125.	g
1250.	h
250.	*k*
25.	m
3252525.	n

IV.

IV. Reliquum eſt, ut multiplicatio ad extractionem requiſita inſtituatur. Eam verò dirigi a totâ formulâ, demptâ particulâ ultimâ, quæ hìc ſexta, jam dictum ſupra. Quoniam igitur particula quinta eſt $5aaaab$, g quintuplum biquadrati radicis prius acquiſitæ a (5) ducendum eſt in b (4) notam radicalem paullo ante incognitam, & jam proximè inventam, ut fiat p. Deinde, quia particula quarta eſt $10aabb$, oportebit b decuplum cubi ex a (5) ducere in quadratum ex b (4), ut fiat q. Rurſum, quia particula tertia eſt $10aabb$, decuplum quadrati ex a 5, nempe k, ducendum erit in cubum ex b 4, ut fiat r. Jam quia particula ſecunda eſt $5abbbb$, quintuplum ipſius a (5) ducendum erit in biquadratum ex b (4) ut fiat s. Denique quia prima particula eſt $bbbbb$, oportebit b (4) ad ſurdeſolidum multiplicando evehere, ut fiat t.

12500.	p
20000.	q
16000	r
6400.	s
1024.	t
14666 5024.	z

Hæc 5 producta numeris, ut in adjectâ formulâ collocatis, in unam colligantur ſumma z, quæ a membro f ſubducatur.

Eodem prorſus modo, ſi plura eſſent membra, ex illis, eâdem formulâ dirigente, notæ radicales reliquæ elicerentur, litterâ a ſemper deſignante totam radicem eatenus acquiſitam, (quæ hìc jam eſſet 54) b verò ſignante notam radicis incognitam, proximè inveniendam. Atque ita educta eſt radix ſurdeſolida prima B ex numero dato X, qui, quod poſt ultimam ſubtractionem nihil ſuperfuerit, verè eſt ſuperſolidus, ſive ſurdeſolidus primus.

Aliæ radices quæcunque per formulas uni-

cui-

cuique poteſtati proprias ſimili planè artificio extrahentur.

Demonſtratio

POrro horum omnium facilis eſt ex iis, quæ cap. II. & IV. in radicis quadratæ, ac cubicæ demonſtrationibus dicta ſunt.

Cæterum, quamvis methodus jam tradita ad omnes omnino poteſtates ſe extendat, convenit tamen potiſſimum ſuperſolidis. In reliquis eſt alia quædam via facilior. Cum enim in qualibet ſerie numerorum continuè proportionalium, omnes termini, hoc eſt omnes poteſtates, ſint vel ſuperſolidi, vel quadrati, vel cubi ſimul, & quadrati, ut demonſtravi in Sch. Prop. VIII. Lib.. IX.; manifeſtum eſt, ex qualibet poteſtate non ſuperſolidâ radicem ipſi propriam elici poſſe extractione radicis quadratæ, aut cubicæ, aut utriuſque ſæpius repetitâ. Quod ita fiet.

Ex Scholio noſtro poſt Prop. VIII. Lib. IX. cognoſce, an poteſtas radicis extrahendæ ſit quadratus ſimul, & cubus; an quadratus, vel cubus tantum. Si eſt quadratus ſimul, & cubus, toties extrahe radicem quadratam, quoties poteſtatis exponens, ejuſque dimidium, & dimidii dimidium, & ſic deinceps poteſt biſecari; & toties cubicam, quoties reſiduum, & reſidui pars tertia, & ſic deinceps poterit triſecari. Detur extrahenda ex A numero R18), id eſt radix poteſtatis, cujus exponens 18. Quoniam 18 poteſt biſecari, extrahe ex A radicem quadratam B. Et

A (B
(C
(D

R quia

quia reſiduum 9 non poteſt biſecari, ſed triſecari; ex radice B extrahe radicem cubicam C. Rurſum, quia reſidui tertia pars 3 poteſt triſecari, ex radice C extrahe rurſus radicem cubicam D: erit D, R18). ex dato numero A extracta. Oporteat deinde ex numero A extrahere R6) hoc eſt radicem, cujus poteſtas exponentem habet 6. Quoniam 6 poteſt biſecari, ex A elice radicem quadratam F: & quia reſiduum 3 non poteſt biſecari, ſed triſecari; ex F elice radicem cubicam G: erit hæc R6), ex dato numero extracta.

A { F
  G

Si poteſtas radicis extrahendæ eſt cubus tantùm, toties extrahenda eſt radix cubica, quoties exponens, & ejus tertia pars, & tertia tertiæ, & ſic deinceps poteſt triſecari: ut ſi ex numero A extrahenda ſit R27). Quia 27 poteſt triſecari, ex A extrahe R3) H: & quia ipſius 27 tertia pars 9 poteſt triſecari, ex H extrahe R3) I: & quia ipſius 9 tertia pars 3 poteſt triſecari, ex I elice R3) K: erit K, R27), ex dato numero A extracta.

A H
  I
  K

Si poteſtas radicis quæſitæ ſit quadratus tantùm, toties extrahe radicem quadratam, quoties poteſtatis exponens, ejuſque dimidium, & dimidii dimidium, & ſic deinceps poteſt biſecari: ut ſi oporteat ex dato numero A extrahere R8), quia exponens 8 poteſt biſecari, ex A extrahe R2) M: & quia dimidium 4 poteſt biſecari, ex

A M
  N
  O

M ex-

M extrahe R2) N: rursum quia dimidium 2 potest bisecari, ex N elice R2) O: erit O, R8), quæ ex numero dato quærebatur.

Horum omnium demonstratio patet ex Scholio Prop. VIII. Lib. IX.

C A P. V I.

Extractio quarumlibet radicum e quibuscumque fractis.

FRactorum alii communes sunt, alii, quos decimales Libro II. Cap. IX., & seq. appellavimus. Radices ex utrisque hoc capite eliciemus.

Ex Fractis communibus radix quæcumque.

OPus totum unicâ præceptione continetur. Ex numeratore, & denominatore fractionis datæ radices extrahantur, quales expetuntur. Fractio ex his composita erit radix quæsita fractionis datæ.

a		c
9604		98
——	{	——
39601		199
b		d

Ut si ex fractione datâ *a*, *b* petatur radix quadrata, vel alia quævis; ex numeratore *a* eliciatur radix *c* speciei datæ, item ex nominatore, quæ sit *d*. Fractio *c*, *d* erit radix quæsita fractionis datæ *a*, *b*.

Demonstratio est manifesta, quia ex vi constructionis fractio *c*, *d* juxta exigentiam radicis datæ multiplicata producet fractum *a*, *b*.

Ex Fractis decimalibus Radix quadrata.

SI decimalis dati maximum signum est par, ut sit in A; extrahe ex A, tamquam purè integro radicem, cujus primam notam affice signi maximi dimidio. Erit hæc, nempe B, radix quæsita.

I II	I	
A 240 I	(49 B	
c 2401,	49	d
k 100.	10,	f

Si signum maximum est impar, ut in C, adjectâ cifrâ fiat par, ut in D. Tum ex D eliciatur radix E, ut supra. Erit hæc radix quadrati C.

I II III	
C 2 0 2 5	
I II III IV	I II
D 2 0 2 5 0	(1 4 2 E
III IV	
8 6	

Ad demonstrationem esto Lemma: si a numero G, qui constet unitate, & cifris paribus, auferatur semissis cifrarum, ut in K; erit K radix quadrata numeri G. Nam, ut patet ex multiplicationis compendio Lib. I. C. VII., habetur quadratus ex K, si cifræ ejus duplentur. Sed ex vi constructionis, tunc K fit G. Ergo G est quadratus ex K. Hoc posito

G 10000
K 100

Demon-

Demonstratur Pars I.

FRactus *c*, *k*, cujus numerator *c* iisdem constat notis, quibus A, nominator verò *k* tot cifris, quot indicantur a signo maximo ipsius A, æquatur ipsi A, per Theorema II. Cap. X. Lib. II. Atqui, ut ex fracto *c*, *k* extrahatur radix quadrata, tantùm opus est, ex numeratore *c*, hoc est ex dato A, tamquam integro, elicere radicem quadratam *d*, & ex nominatore *k* radicem *f*: elicitur verò ex *k* radix quadrata, ut patet ex Lem., si dimidietur cifrarum numerus, hoc est si dentur ipsi *f* tot cifræ, quot indicantur a semisse maximi signi ipsius A. Ergo etiam, ut ex A extrahatur radix, solùm opus est, ex A tamquàm integro elicere radicem *d*, eique subscribere nominatorem *f*, qui constet unitate, & tot cifris, quot indicat semissis maximi signi ipsius A, ut habeatur fractus *d*, *f*. Atqui fractus *d*, *f*, per Theor. II. C. X. l. II., est æqualis B; cum *d* ex vi constructionis iisdem constet notis, quibus B; & *f* tot habeat cifras, quot indicantur a semisse maximi signi ipsius A; hoc est, per construct., quot indicantur a signo maximo ipsius B. Ergo etiam B est radix quadrata dati A. *Q. E. D.*

Demonstratur Pars II.

PEr Axioma Cap. X. L. II. D est æqualis C. Atqui per I. partem E est radix quadrata ex D. Ergo E etiam est radix quadrata ex C. *Q. E. D.*

Ex fractis decimalibus radix cubica.

	I II III		I
A	973 3 6		(46 B.
	97336 a		46 c
	1000 b		10 d

SI maximum signum decimalis dati trisecari possit, ut in A contingit; ex A tamquam purè integro radicem extrahe cubicam, cujus primam notam affice signi maximi triente. Erit hæc, nempe B, radix cubica ex A.

	I II III IV	
C	9 7 3 3 6	
	I II III IV V VI	I II
D	9 7 3 3 6 0 0	(21 3 F
		II III IV V VI
		7 0 0 0 3

Si maximum signum trisecari nequeat, ut accidit in C, adjice unam, vel duas cifras, ut possit, quemadmodum vides in D. Tum ex D elice radicem cubicam F, ut supra.

Ad demonstrationem esto Lemma: si detur numerus G constans unitate, & cifris, quas metitur ternarius; *K* unitas cum cifrarum triente erit radix cubica ipsius G.

1000000 G
100
K

Nam, ut patet ex multiplicationis compendio, habetur cubus ex *K*, si ipsius cifræ triplentur. Sed tunc ex vi constr. fit G. Ergo G est cubus ex *K*.

Hoc posito, demonstratio planè similis erit præcedenti.

Ex

Ex fractis decimalibus radix quæcumque.

EX numero dato, tamquam purè integro, extrahe radicem datam. Tum maximum signum dati numeri divide per exponentem radicis datæ. Quotiens dabit signum, quo afficienda est nota prima radicis inventæ. Si maximum signum per exponentem radicis datæ dividi non possit, adjice tot cifras decimales, ut possit; & operare, ut supra.

Exemplum.

```
             I II III IV V        I
    F 4 5 9 1 6 5  0  2 4      (54 H

   I II III IV V VI VII VIII IX X  I II
F 1 0 9 9 5  1  1 6 2  7     7  7 6(256H
```

OPorteat, ex numero F extrahere R5) hoc est supersolidam primam. Ex F, tamquam integro, elice R5) Tum per 5 exponentem radicis datæ divide maximum signum dati F, quod in primo exemplo est V. seu 5, in secundo est X. seu 10. Quotiens, qui est in primo 1; 2 in secundo, dat signum, quo afficienda est prima nota radicis inventæ; eritque H radix supersolida dati F.

Digitized by Google

Demonſtratio eadem prorſus, quæ ſupra, præmiſſo hoc Lemmate. Datus ſit numerus C, conſtans unitate, & cifris, quas numerus D metiatur per numerum E.	C 100000	, 00000
	R5) D	R2) E
		100 F

Erit numerus F, conſtans unitate, & cifris a quotiente E indicatis, radix dati numeri C, à diviſore D denominata.

Nam cum D metiatur cifras dati C per E; D in E ductus producet cifras dati C. Ergo per XVI. l. VII. etiam E in D producet C. Atqui per conſtruct. E eſt numerus cifrarum ipſius F. Ergo cifræ F ductæ in D producunt cifras dati C. Ergo C eſt poteſtas, cujus exponens eſt D, & radix F.

CAP. VII.

Approximatio radicum.

SI in extractione radicis quadratæ, cubicæ, vel alterius cujuſcumque poſt ſubtractionem ultimam aliquid ſuperſit; certum erit ex iis, quæ II., & IV. Cap. ſunt demonſtrata, numerum, cujus radix quærebatur, non eſſe quadratum, aut cubum, aut aliam poteſtatem; ac proinde non habere radicem quadratam, aut cubicam, ſeu aliam pro quæſiti ratione. Poterunt

runt nihilominus radices exhiberi, quæ ad veram impossibilem, quæ surda, seu irrationalis ab Arithmeticis appellari solet, accedant propiùs semper, ac propiùs in infinitum; hoc est quæ ab impossibili verâ differant quantitate minori quacumque datâ; ac proinde quæ per seipsas multiplicatæ quadraticè, vel cubicè, vel aliter pro gradu dato, producant quadratos, vel cubos, vel &c. differentes a dato numero, quantitate quacumque datâ minori. Artificium est ejusmodi.

I. Numero dato *a*, ex quo aliquid superfuit, adjiciantur aliquot cifrarum decimalium binarii,

```
a        b                 c    d     m
       I II III IV            I II
2507 | 0 0 , 0  0   (50 | 0 6   2500
   7 I II III IV          I II III IV
   k 9 9  6   4   25060 0   3  6
          f                 n
```

si radix quadrata petitur; aliquot terniones, si cubica; aliquot quaterniones, si biquadrata; quinades, si supersolida; & sic deinceps, juxta exponentem uniuscujusque potestatis. Ex numero sic aucto *a*, *b* radicem talem elice, qualis petitur, ut Capite præcedente traditum est; hoc est extractionem radicis inchoatam prosequere. Novæ radicales notæ *d*, prioribus *c* adjunctæ, radicem dabunt, propinquiorem veræ impossibili.

In

```
                                                      m
  I II III IV V VI      I  II III           I II
2507 | 00,00 (50 | 0 6      2500
   a       b        c     d
 II   III  IV  V  VI       I II III IV V VI
K 7    9    9  6   4   2506  0   0  3  6
       f                     n
```

In exemplo extractionis quadraticæ, hic apposito, quadratum prioris radicis *c* est *m*, quod a numero dato *a* deficit, numero *k*. Quadratum verò radicis *c d* est *n*, quod deficit ab dato *a*, per *f*. Est verò *f* minus, quàm *k*. Porro notæ residui *f* sunt semper homogeneæ totidem primis notis numeri *a*, *b*.

Quod si pluribus semper, ac pluribus cifrarum binariis, ternariis &c. adjectis continuetur extractio; appropinquabitur ad radicem veram propiùs in infinitùm, sic, ut differentia fiat quacumque datâ minor: numquam tamen ad æqualitatem pervenietur.

II. Ex his patet, quid præstandum sit in fractis vulgatibus; adjiciendæ videlicet cifræ, ut supra, tam numeratori, quàm nominatori, si in utroque aliquid superfuit; aut alterutri tantùm, si aliquid superfuit tantùm inalterutro.

III. Eodem artificio ex numero, quantumvis parvo, extrahetur radix, quantumvis alta. Exemp. gr. ex binario R9) hoc est radix cubo-cubica, Adjungentur enim binario aliquot cifrarum nonades, quia exponens radicis quæsitæ est 9, & ex binario sic aucto extrahetur radix quæsita, ut Capite præcedente traditur.

Quo-

Quoniam verò mirum videri solet, methodo extractionis jam explicatâ per fractos numeros ad radicem veram appropinquari in infinitum, neque tamen ad eam posse unquam perveniri, ac proinde impossibilem esse; videtur hic locus exigere, ut ejus rei demonstrationem producamus. Esto igitur

THEOREMA.

Numerus non quadratus, aut non cubus sit a, hoc est, cujus integer numerus nullus sit radix quadrata, vel cubica. Demonstrandum est, ejus radicem etiam, ne fractionibus quidem ullis posse exhiberi; hoc est, nullum posse dari, aut fractum numerum, aut mixtum ex integro, & fracto, qui in se quadraticè, vel cubicè producat datum numerum a.

Demonstratio.

1.	x	a.6
1.	x	t.a.6
$B\frac{m}{n}$		$\frac{y}{z}D$

Detur enim, si fieri potest, fractus B, qui sit radix numeri *a*: (si fingeretur radix esse integer cum fracto, integro ad fractum reducto, prior casus non mutabitur) hic fractus B, in se ductus quadraticè, aut cubicè, alium gignet fractum D: videlicet si tam numerator *m*, quàm nominator *n* in se ducantur quadraticè, aut cubicè. Quoniam igitur tam *a* per hyp., quàm D per const. sunt quadratus, vel cubus fracti B; erunt *a*, & D æquales. Quare, cum per Theor. II. Cap. II. L. II. unitas (1) sit ad fractum D, ut nominator

Digitized by Google

nator z est ad numeratorem v; etiam 1 erit ad a, ut z ad y. Jam verò, quia numeri z, & y quadrati sunt, vel cubi, utpote geniti ex numeris n, & m in se ipsos ductis quadraticè, vel cubicè; inter eos cadent, vel unus medius proportionalis, per XI. L. VIII. si quadrati sint; vel duo medii, per XII. L. VIII. si sunt cubi. Quare, ut jam ostendi, cum 1 sit ad z, ut z ad y; etiam inter 1, & a cadet unus medius x, vel duo x, t per VIII. L. VIII. Ergo per VIII. L. IX. a quadratus est, vel cubus, ejusque radix quadrata, vel cubica est numerus integer x. Quod est absurdum, cum hypothesim destruat. Non igitur &c.

Eodem modo Theorema non de quadrato solum, & cubo, sed etiam de potestate quacumque demonstrabitur.

Quamvis autem numerorum non quadratorum, & non cuborum &c. radices impossibile sit numeris explicare; possunt nihilominus exhiberi geometricè hunc in modum.

Datus sit numerus non quadratus 12, cujus duo latera, (hoc est, quæ per invicem multiplicata ipsum producunt) sint 3, & 4. Exhibeantur deinde duæ rectæ lineæ, una 3 partium æqualium, quarum altera sit 4; interque eas per XII. L. VI. recta inveniatur media proportionalis. Hæc erit radix quadrata. Ejus enim quadratum per XVII. L. VI. æquale est extremarum 3, & 4 rectangulo, quod est 12 ex hyp. Quare numeri surdi, seu irrationales meritò geometrici numeri appellari possunt.

Scho-

Scholium.

T*Ametsi radices surdæ nullis numeris, ut jam ostendimus, exprimi possint; ex his tamen, quod minus exercitatis incredibile videri queat, quædam inter se commensurabiles sunt; ac proinde licèt ipsæ nequeant exprimi numeris, potest tamen earum proportio. Rem omnem triplici Theoremate complexus exponam.*

THEOREMA I.

R*Adices surdæ numeris absolutis incommensurabiles sunt.*

Demonstratio.

D*Ata sit* R2) 8 *hoc est radix quadrata numeri* 8), *&* 5. *Si* 5, *&* R2) 8 *commensurabiles sint, erunt inter se, ut aliquis numerus* a *ad aliquem numerum* b. *Ergo etiam quadratum ex* 5, *nempe* 25, *est ad quadratum* R2) 8, *nempe ad* 8, *ut* aa *quadratus numeri* a *est ad* bb *quadratum numeri* b. *Igitur, quia primus* 25 *quadratus est, etiam secundus* 8, *per* XXIV. L. VIII. *quadratus est; quod repugnat hypothesi.*

5	R2) 8
a	b
aa	bb
25	8

Eodem discursu, sed per XXV. L. VIII. *ipsum de surdâ radice cubicâ demonstrabitur. Atque inde id non obscurè concluditur de qualibet.*

Corol-

Corollarium.

I. *Hinc patet, diametrum in quadrato lateri incommensurabilem esse. Cum enim per XLVII. Lib. I. quadratum diametri duplum sit quadrati ex latere; erit diameter R2) 2 hoc est radix quadrata binarii: latus verò, hoc est 1, & R2) 2 incommensurabiles sunt.*

II. *Hinc aliâ viâ colligitur veritas Theorematis superiùs demonstrati. Cum enim radices surdæ incommensurabiles sint numero absoluto cuicumque, etiam potestatibus suis incommensurabiles erunt, ut R2) 7 quadrato suo 7: R3) 5 cubo suo 5. Ex quo patet, eas nullis numeris seu integris, seu fractis exprimi posse. Si enim posset radix surda numero exprimi; cum ejus potestas etiam numerus sit, esset surda radix ad suam potestatem, ut numerus ad numerum, ac proinde eidem commensurabilis, contra quàm ostensum jam sit.*

TREOREMA II.

Si una radix surda, dividens surdam alteram, quotientem gignat rationalem, hoc est numerum absolutum; surdæ radices illæ commensurabiles erunt.

Demon-

Demonstratio.

DAtæ sint R2) 12, & R2) 3. R2) 3 dividens R2) 12, quotientem facit R2) 4, hoc est 2. Similiter R2) 8, dividens R2) 18, facit R2) A, hoc est R2) B, hoc est fractum C. Dico igitur R2) 12, & R2) 3; item R2) 18, & R2) 8 commensurabiles esse. Nam per definitionem divisionis R2) 3 dividens est ad R2) 12 divisam, ut unitas ad quotientem 2, qui ex hyp. absolutus numerus est. Ergo, &c.

R2) 12 — R2) 4 seu 2
R2) 3

A: R2) 18 / 8 over R2) 18

R2) 8 — (R 9/4 seu 3/2 C; B

Pari modo dividens R2) 8 est ad R2) 18 divisam, ut unitas est ad C, quotientem absolutum. Ergo, &c.

Exempla adhibui radicum quadratarum; sed eadem est ratio quarumcumque.

THEOREMA III.

SI una radice surdâ divisâ per alteram surdam quotiens existat irrationalis, incommensurabiles sunt.

Demonstratio.

DAta sit R2) 48, *&* R2) 8. *Hæc illam dividens, quotientem gignit* R2) 6, *quæ irra-*

irrationalis, sive surda est; cum 6 non sit quadratus. Similiter R3) 6, dividens R3) 24, quotientem gignit R3) 4, irrationalem; cum 4 non sit cubus.

Dico igitur R2) 48, & R2) 8; item R3) 24, & R3) 6 incommensurabiles esse. Nam dividens est ad divisam, ut 1 ad quotientem irrationalem R2) 6, vel R3) 4.

R2) 48 / R2) 8 — R2) 6.

R3) 24 / R3) 6 — R3) 4.

Unitas autem ad quemlibet irrationalem numerum, per Theor. I., incommensurabilis est. Ergo etiam data radix surda dividens, & data surda divisa incommensurabiles sunt. Q. E. D.

Divisio simplex radicum, quæ in hoc scholio assumitur, per se est manifesta.

C A P. VIII.

De tabulis Quadratorum, & Cuborum.

SI semel tabulæ conficerentur, quibus singulorum ab unitate numerorum quadrati, & cubi continerentur, sublata esset magnâ ex parte radicum extrahendarum molestia. Præclarè igitur de Arithmeticis Paulus Guldinus noster meritus est, qui omnium ab unitate numerorum, usque ad decimillenarium, quadratos, & cubos exhibuit in appendice libri I. de centro gravitatis.

Con-

Constructio tabularum.

TAbulas ejusmodi ut conficias, aut jam confectas extendas, singulas ab unitate radices per se ipsas multiplica: provenient quadrati omnes, qui rursum in radices ducti, dabunt omnes cubos. Verùm, quia multiplicatio, in magnis præsertim numeris, molesta est; vias alias breviores, quæ solâ additione opus habeant, insignes horum numerorum proprietates suppeditant.

Generantur igitur quadrati ordinatim omnes

I. Ex continuâ additione numerorum imparium ab unitate. 1, & 3 faciunt 4 primum quadratum: cui si addas imparem proximum 5, fit 9 quadratus secundus: huic adde imparem tertium 7, fit 16 quadratus tertius; atque ita deinceps. Demonstrat Maurolycus L. I. Arithm. p. 15.

II. Quadrati cujuscumque duplicata radix, unitate adjectâ, cum quadrato ipso, dat quadratum proximè majorem. Demonstrat Maurolyc. Arithm. Lib. I. p. 15.

Cubi verò sic.

I. Duo primi impares 3, & 5 dant primum cubum 8. Tres impares sequentes 7, 9, 11 dant cubum secundum 27. Quatuor sequentes impares 13, 15, 17, 19 dant cubum tertium 64. Et sic deinceps. Demonstratur a Mauroly-

S co

co Arithm. Lib. I. p. 62.

II. Constituatur series numerorum a 6 incipiens, & semper crescens per 6. Unitas, adjecta ad 6, dat 7 differentiam primi cubi, & unitatis, quæ adjecta ad 12, dat differentiam cubi secundi, & tertii: & sic deinceps omnes cuborum differentiæ reperiuntur. Inventis autem differentiis, habentur cubi: nam si unitati addas 7, fit 8 cubus primus, cui si addas sequentem differentiam 12, fit 27 cubus secundus; & sic deinceps. Vide Maurolycum Lib. citato.

	Differ.	cub.
6	1	1
12	7	8
18	19	27
24	37	64
30	61	125
36	91	216

Usus Tabularum.

TAbulis jam confectis, sic utere. Numerum datum, cujus radix petitur, quære inter quadratos, vel cubos; quem si reperis, etiam radicem illi adscriptam pariter invenies: si non reperies, quære illo proximè minorem, radix huic adscripta erit maxima, quæ citra fractiones elici ex dato numero poteit.

Quoniam verò tabulæ Guldini continent quadratos, & cubos radicum omnium, usque ad decimillesimam, cujus quadratus est 100000000, novem constans notis, cubus autem 1000000000000 notis constans 13; earum ope obtinebitur quadrata radix omnis numeri, qui notis constet non pluribus, quàm octo; & radix cubica omnis numeri, qui notis scribatur non pluribus, quàm 12.

Quod si radix petatur e numero, pluribus notis

notis constante; semper nihilominùs, per dictas tabulas, membra quatuor majora expedientur.

Oporteat ex numero *a c* elicere radicem quadratam, vel cubicam. Partire illum in membra. Tum quære in tabulis numerum *a b* ex

```
  a         b     c
  2,48,09,56,71,92,        f( 1575——
d 2 48 06 25
————————————
     k   3,31

  a           b     c
  23,089,423,791,215       f( 2847——
  23 076 099 423
——————————————
     k 13 324 368
```

quatuor postremis membris conflatum, ut illo proximè minorem, qui erit *d*, & radicem illi adscriptam *f* post lunulam repone. Ex reliquo deinde numero *k b c* extractionem prosequere methodo consuetâ.

CAP. IX.

Usus laminarum tabulæ Pythagoricæ in extrahendâ radice quadratâ, & cubicâ.

PArentur duæ laminæ, ut Cap. VI. L. I, quarum alteri inscribantur unitas, & 8 primi quadrati; alteri verò unitas cum 8 primis cubis: eâ lege, ut cum quadrati unâ constant notâ,

ſcribantur in triangulo inferiori; cum binis notis conſtant, prima ſcribatur in triangulo inferiori, ſecunda in ſuperiori: cum verò cubi tribus conſtabunt notis; duæ primæ in inferiori triangulo reponantur, tertia in ſuperiori; cum binis, ambæ in inferiori, & cifra in ſuperiori; cum unâ, eam loca in inferiori; appoſitâ ad lævam cifrâ, itemque aliâ cifrâ in triangulo ſuperiori. Tunc tamen duæ primæ notæ, quamvis in eodem triangulo conſiſtant, duo loca efficiunt, ſic ut ſecunda ad decades pertineat. Harum lamellarum hæc cubica, illa quadratica appelletur.

Uſus porro in extrahendâ radice quadratâ hic eſt. Ex ultimo membro radix extrahitur more conſueto. Deinde duplum radicis eatenus acquiſitæ, ſi unicâ notâ conſtet, quære in capite unius laminæ; ſi pluribus, in capite plurium. His ad dextram applicetur lamina quadratica, ad ſiniſtram lamina exponens. Tum adverte, quis ordo numerum contineat æqualem, aut proximè minorem membro. Numerus laminæ exponentis, denominans ordinem, apponatur radici antea acquiſitæ; ipſum verò ordinem exſcriptum aufer a membro. Eodem planè modo reliqua membra expedientur.

In cubicâ ſic proceditur. Oportet ex numero A educere radicem cubicam.

Ex ultimo membro extrahitur radix more conſueto. Maxima radix

A
22,022,635,627 (2
8
—
p 14, 022
n 13 952
—
70 q

cubi-

cubica in 22 eſt 2; ejus cubus 8 ſubtractus a 22 relinquit 14, quibus adſcribe membrum penultimum 022, ut fiat totum *p* 14, 022,

```
  819 k
 -----
11529 b
...6. c
.48.. d
 -----
16389 e
```

Triplum quadrati ex radice hactenus acquiſitâ, nempe 12, ſtatue in capite duarum laminarum, quibus ad dexteram appone laminam cubicam, ad ſiniſtram verò laminam exponentem. Tum adverte, quotus ordo ſit æqualis, aut proximè minor membro *p*. Lamina exponens indicabit, eſſe nonum. Hunc igitur excribe, eritque *b*,

```
  648 k
 -----
10112 f
..24. g
.36.. h
 -----
13952 n
```

Supra primam notam 9 ordinis *b* jam exſcripti ſcribe ejus denominatorem 9, eique verſus lævam appone ejus quadratum 81.

Laminæ cubicæ ad dextram appone laminam, quæ habeat in vertice triplum radicis prioris 2, nempe 6: ex hac deſcribe numerum, contentum in quadrato, deſignato per numeri *k* notam ſecundam quæ eſt 1; ea verò deſignat primum loculamentum, in quo reperis 6. Scribe ergo 6 infra 1, & 2. Ex eâdem laminâ exſcribe numerum loculamenti deſignati per numeri *k* notam tertiam 8, nempe 48. quem repone infra 8, & 5.

Hos tres numeros *b*, *c*, *d*, collige in unam

ſummam *e*, quæ auferenda eſſet a membro *p*; ſed quia non poteſt, pro *b* exſcribe ordinem octavum, qui erit *f*; & ſupra numeri *f* notam primam 2 ſcribe 8, eique quadratum ejus 64 appone; perque hunc numerum loco numerorum *c*, *d* reperi alios *g*, *b*, modo jam tradito. Deinde *f*, *g*, *b*, collectos in ſummam *n*, quæ jam minor eſt membro *p*, ſubtrahe a membro *p*. Et reſiduum *q* infra lineam repone.

In membris, quæ ſuperſunt, eadem operatio repetitur.

Ratio horum omnium pendet a demonſtrationibus radicum quadratæ, & cubicæ Cap. II. & IV. hujus libri, & a demonſtratis Cap. VIII. Lib. I.

ARIT-

ARITHMETICÆ PRACTICÆ LIBER IV.

DE REGULIS.

PRacticæ Arithmeticæ quatuor sunt regulæ. Prima est regula Proportionum, sive trium; secunda Societatum, sive consortii; tertia Alligationis; quarta Positionum simplex, ac duplex, quam alii regulam Falsi appellant. Inter has prima præcipua est, a qua reliquæ omnes dependent. Illius quatuor sunt partes: nimirum regula proportionum directa simplex, eversa simplex, directa composita, eversa composita. Singularum præcepta hoc quarto libro explicanda, ac demonstranda suscepi.

CAPUT I.

Regula simplex proportionum directa, & eversa.

MEthodus, qua ex tribus numeris datis eruitur quartus proportionalis incognitus, regula Proportionum dicitur. Ab aliis, ob tres numeros datos, regula trium. Ab aliis aurea, ob summam utilitatem, appellatur.

In quæstionibus practicis, quæ nimirum ad usus humanos pertinent, e tribus numeris datis, sive cognitis semper duo sunt homogenei, hoc est de eâdem re inter se, quorum unus annexam habet quæstionem: ut cum dico, 60 aureos expendo 5 mensibus; quot ergo mensibus expendam aureos 254? Numeri homogenei, sive de eâdem re, sunt 60, & 254 aurei, quorum postremo annexa est quæstio. Is igitur, qui annexam habet quæstionem, tertio loco ponatur; alter de eâdem re, primo; reliquus, qui solitarius est, & homogeneus quarto incognito, in medio consistat. Si jam sit, ut primus ad tertium, ita secundus ad quartum incognitum; hoc est si quanto primus major, vel minor tertio, tanto secundus sit major, vel minor quarto incognito: quæ tum solvendæ quæstioni adhibebitur, regula Proportionum directa appellabitur.

Exemplum.

DUo gradus maximi terræ circuli continent milliaria unius horæ 48: igitur 360 gradus, hoc est tota circumferentia quot milliaria continebit?

Grad.	Milliar.	Grad.	Milliar.
2	48.	360	. . . . .

Hic quanto primus est minor tertio, tanto secundus est minor quarto incognito.

Quod si, ut primus ad tertium, ita reciprocè quartus incognitus sit ad secundum; hoc est, si quanto primus est major, minorve tertio,

tio, tanto quartus incognitus debeat esse major, minorve secundo; regula Proportionum eversa dicitur.

Exemplum I.

FOrtalitium absolvunt 1000 Fossores diebus 12; 325 Fossores quot diebus absolvent?

Foss.	Dies	Foss.	Dies.
1000	12	325	. . .

Hìc quanto primus est major tertio, tanto quartus incognitus esse debet major secundo.

Exemplum II.

IN Urbe obsessâ 7 mensibus ali possunt Præsidiarii 1500: ergo mensibus 12 quot alentur?

Mens.	Præsid.	Mens.	Præsid.
7	1500	12	. . . .

Hic quanto primus est minor tertio, tantò quartus incognitus debet secundo esse minor.

Arithmetici passim ex ipsâ quæstione dijudicandum relinquunt, utrum proportio directa sit, an eversa, sive reciproca. Rectè id quidem: verumtamen indicium hujus rei certum assignari hoc potest. Si duo termini homogenei, hoc est de eâdem re, aliam rem quampiam unicam, & a quatuor terminis quæstionis diversam, communiter respiciant, circa quam lato saltem modo aliquid agant, ad quod duo reli-

reliqui termini se habeant per modum circumstantiæ; eversa, sive reciproca proportio erit. Ratio colligitur ex prop. XIV. l. VI.

In primo exemplo res, circa quam primus, & tertius termini, nempe Fossores, aliquid agunt, est Fortalitium: in secundo est annona, obsidionis tempore consumenda a Præsidiariis, termino videlicet secundo, & quarto.

Solutio directa.

MUltiplica secundum per tertium, & productum divide per primum. Quotiens, sive integer ille sit, sive integer cum fracto, erit quartus proportionalis incognitus, qui quærebatur.

Exemplum.

Grad.	Milliar:	Grad.	Milliar.
2	48	360. fiunt	8640.
a	b	c	z

DUo gradus maximi terræ circuli continent milliaria Belgica unius horæ 48: igitur gradus 360, hoc est circumferentia tota, quot continet milliaria?

Collocatione factâ, ut supra, multiplica secundum 48 per tertium 360. Productum 17280 divide per primum 2. Quotiens 8640 est quartus, qui petebatur.

Demon-

Digitized by Google

Demonstratio.

SI quartus proportionalis est integer, patet ex Pro. XX. L. VII. Si est integer cum fracto, patet ex eadem Prop., & ex iis, quæ demonstravi lib. I. Cap. IX. Cum enim ex hyp. *a* sit ad *b*, ut *c* ad z quartum, qui petebatur; erit, per XIX. L. VII., factus ex *a* in z æqualis facto ex *b* in *c*. Atqui facto ex *a* in z diviso per *a* proveniet z. Ergo etiam facto ex *b* in *c* diviso per *a*, proveniet z. *Q. E. D.*

Si contingat numeros de eadem re non esse ejusdem nominis, & mensuræ, ante operationem erunt reducendi ad eandem, ut si existat quæstio: pro 10 mensibus solvi florenos 250: pro 20 diebus ergo, quot solvam? 10 menses & 20 dies sunt quidem de eadem re, nimirum tempore, sed mensura diversa: oportebit igitur 10 menses prius ad dies reducere, quàm operatio instituatur.

Examen instituitur multiplicando primum per quartum, & secundum per tertium: si enim producta sint eadem, rite es operatus. Patet ex Prop. X. l. VII.

Solutio eversa, seu reciproca.

MUltiplica primum per secundum, productum divide per tertium. Quotiens, sive integer fuerit, sive fractus erit quartus proportionalis, qui petebatur.

Exem-

Digitized by Google

Exemplum.

FOssores 1000 munitionem aliquam absolvunt diebus 12. Fossores 325 eamdem quot diebus absolvent? Collocatione factâ, ut supra: primum 1000 multiplica per secundum 12; productum 12000 divide per tertium 325. Quotiens A est quartus, qui petebatur.

A
$36\frac{300}{325}$

Fossores.	Dies.	Fossores.	Dies.
1000	12	325	$36\frac{300}{325}$

Aliud.

Arcis Præfectus annonâ, quam habet, alere potest mensibus 7 Præsidiarios 1500. Igitur mensibus 12 quot alet?

Mens. 7.	Præsid. 1500.	Mens. 12.	Præsid. 875
A	B	C	D

Primus A 7, ductus in secundum B 1500, facit 10500, qui divisus per tertium C 12, dat quartum D 875.

Demonstratio.

QUoniam ex hyp. A est ad C, ut reciprocè D est ad B, erit invertendo, ut C ad A, sic B ad D.

C. A.

Digitized by Google

C. A. B. D.

Atque ita collocatio eversa reducta est ad directam, incognito D quartum in utraque collocatione locum obtinente. Ergo D rite inventus est ex producto ipsius A in B. diviso per C.

Examen institues, ducendo primum A in secundum B, & tertium C in quartum D. Si producta sint eadem, rite operatus es; ut patet ex XIX. l. VII. Est enim ex hyp. ut A ad C, ita D ad B.

C A P. I I.

Regula proportionum Composita.

CUm termini dati, sive cogniti sunt plures, quàm tres, nimirum 5, aut 7 aut etiam plures; regula proportionum composita dicitur: estque duplex etiam ipsa, directa videlicet, & eversa. Inter terminos datos tres semper præcipui sunt; & ex his duo de eâdem re, quibus cæteri adhærent; unus solitarius, & homogeneus illi, qui quæritur. Utrum quæstio directè solvenda sit, an eversè; ex indicio mox dando dijudicabitur.

Com-

Composita directa.

Mercatores	8
aureis	1000
Luc. aureos	700
Mercatores	10
aureis	4000
Quot Lucr. aur.?	....

I. PRoponatur quæstio terminorum sex: 8 Mercatores, 1000 aureis, lucrantur 700 aureos. Igitur 10. Mercatores, 4000 aureis, quot aureos lucrabuntur? Tres numeri principales sunt 8 Mercatores, 700 aurei, qui solitarius est, & 10. Mercatores. Duobus de eâdem re reliqui duo adhærent, nimirum aurei 1000, & aurei 400, qui duorum principalium de eâdem re, nempe Merc. 8. & Mercat. 10 quasi comites sunt.

Ordo terminorum is erit, qui in exemplo apposito. Nimirum tertio loco collocabitur principalis ille, qui annexam habet quæstionem Mercat. 10 cum suo comite aur. 4000. Primo loco principalis alter de eadem re Mercat. 8 cum comite suo aur. 1000. Is verò, qui solitarius est secundo loco collocabitur.

Terminis hunc in modum constitutis, dijudicandum erit, directam proportionem, an eversam contineant: quod quia multi, vel ignorarunt, vel neglexerunt; imperfectè, & confusè hanc regulam tradiderunt. Indicium porro erit hujusmodi. Si tam in loco, seu membro primo, quàm tertio unus terminus respectu alterius se habeat per modum circumstantiæ, medii &c.; scito quæstionem directè solvendam. Si verò in membro primo, & tertio

tertio unus terminus respectu alterius quidpiam agat, exerceatve, certus esto, proportionem eversam in quæstione contineri, ac proinde solvendam esse eversè.

Ex hoc indicio quæstio proposita reperietur esse directa; quæ generali artificio ita solvitur. Terminos primi loci 8, & 1000 inter se multiplicando, reducito ad unum 8000. Similiter termini tertio loco positi 10, & 4000 ad unum reducantur 40, 000. Atque ita termini 5 redacti sunt ad 3.

Aurei.	Lucr.aur.	Aurei.
8000	700	40,000.

Circa quos si regula trium simplex exerceatur, prodibit numerus incognitus, qui petebatur, 3500 aurei.

Demonstratio

OPerationis manifesta est. Cum enim plures termini per multiplicationem reducuntur ad unum, quæstio non immutatur. Eadem sanè quæstio erit, sive dicas: 8 Mercatores aureis 1000, lucrantur 700 aureos; igitur Mercatores 10, aureis 4000, quot lucrabuntur? sive dicas octies mille aureis, Mercator 1 lucratur 700; igitur 40, 000 aureorum, Mercator 1 quot lucrabitur? Tantum enim lucratur 1 Mercator 8000 aureorum, quantum 8 Mercatores aureis 1000; & tantum 1 Mercator 40, 000 aureorum quantum 10 Mercatores 4000 aureorum. Atqui in hac postremâ duo termini evanescunt, quod primo, & tertio loco iidem recur-

currant, videlicet 1 Mercator, quorum proinde ratio habenda non est. Igitur salvâ quæstione 5 termini ad tres sunt reducti. Ex quo patet quæsitum.

II. Quæstio proponatur terminorum octo. Mercatores 8; aureis 1000, mensibus 2, lucrantur aureos 700: igitur 10 Mercatores, 4000 aureorum, mensibus 4, quot lucrantur aureos? Ordo terminorum hic erit.

Mercatores	8
aureis	1000
mensibus	2
Lucr. aureos	700
Mercatores	10
aureis	4000
mensibus	4
Quot Lucr. aur?	....

Deinde terminis primi membri per invicem multiplicatis, itemque membri tertii, quæstio ad terminos reducetur tres; hunc in modum. 8 in 1000 sunt 8000: quæ ducta in 2, faciunt 16,000: hic erit primus terminus. 10 in 4000 sunt 40,000: hæc ducta in 4, faciunt 160,000: hic erit terminus tertius. Sic ergo stabit exemplum.

Aurei.	Lucr. aur.	Aurei	aur.
16,000,	700.	160, 000 fiunt	...

Demonstratio

RUrsum manifesta est. Nam ad lucrum perinde est, sive dicas: 8 Mercatores, 1000 aureis; sive 1 Mercator, 8000 aureorum. Rursus

Digitized by Google

fus perinde eſt, ſive dicas: 1 Mercator, 8000 aureorum, 2 menſibus; ſive 1 Mercator, 1 menſe, aureis 16,000. Similiter in membro tertio perinde ad lucrum erit, ſive dicas; 10 Mercat., 4000 aur.; ſive 1 Mercator, 40, 000 aur.; & rurſum perinde eſt, ſive dicas 1 Mercat., 40, 000 aur., 4 menſ., ſive 1 Mercator, 1 menſe, 160, 000, aur. Igitur per multiplicationem terminorum inter ſe, quæſtio ad hanc formulam reducta eſt.

Mercator	1
menſe	1
aureis	16000
Lucr. aureos	700
Mercator	1
Menſe	1
aureis	160, 000
Quot Lucr. aur.?	. . . .

In qua, quia quatuor termini, qui in primo, & tertio loco iidem ſunt, evaneſcunt, tota quæſtio à 7 terminis reducta eſt ad 3.

Compoſita everſa, ſeu reciproca.

MIrum eſt, quàm confusè, & imperfectè hæc regula paſſim tradatur, eâ credo de causâ, quod tam illius demonſtrationem, quàm diſcrimen a directâ non ſatis obſervaverint.

I. Quæſtio propoſita eſto terminorum ſex: 10 Homines expendunt 4 aureos diebus 3; Homines 100, aureos 2000, quot diebus expendent? Terminos eodem ordine, quo in directâ, collocabis. Tum ex indicio ſuperius

T tra-

tradito deprehendes proportionem eversam, sive reciprocam contineri in quæstione; cum tam *a* circa *b*, quàm *d* circa *e* aliquid agat; Homines nimirum expendunt aureos. Perspecto jam genere quæstionis, accuratiùs adhuc terminorum singulorum locus erit determinandus.

Homines	10,	a
aureos	4.	b
exp. dieb.	3.	c
Homines	100.	d
aureos	2000.	e
Quot dieb. exp?		

Terminus agens *a*, qui non habet annexam sibi quæstionem, primus esto. Illius comes *b*, secundus. Tertius *c* ille sit, qui solitarius est, & homogeneus quæsito. Quartus sit agens, qui annexam habet quæstionem, & primo homogeneus est, nempe *d*. Illius comes *e*, secundo *b* homogeneus, quinto loco consistat. Ordine terminorum hunc in modum constituto, generali artificio quæstionem propositam, & alias similes quascumque solvemus.

Termini primus *a*, tertius *c*, quintus *e* multiplicentur per invicem, & gignant *ace*. Deinde secundus *b* ducatur in quartum *d*, & faciat *b d*: productum secundum *b a* dividat primum productum *ace*. Quoniam A dabit terminum incognitum, qui petebatur.

$$A = \frac{ace}{bd}$$

Demonstratio.

REponatur quinto loco idem terminus, qui secundo, ut sit quæstio. Si 10 Homines 4 aureos

4 aureos expendunt, diebus 3; Homines 100, etiam 4 aureos, quot diebus expendent?

Homines 10. a
aureos 4. b
Exp. dieb. 3. c

Homines 100 d
aureos 4. b
Quot dieb. exp? ....

Quoniam hic duo termini identici sunt, ac proinde evanescunt; manifestum est, quinque terminos redactos esse ad tres, *a*, *c*, *d*,

Qui cum indicio tradito Cap. I. proportionem eversam contineant, quartus per regulam trium simplicem eversam reperiendus est. Primus igitur *a* in secundum *c*, faciat *ac*: quo diviso per tertium *d*, quotiens B est quartus: ac proinde 100 homines 4 aureos expendent, diebus B. Littera B porro designat fractionem speciosam, quæ typis commodè interseri non potest; quod etiam deinceps nota.

$$B\frac{ac}{d}$$

Homines 100. d
Aureos 4. b
Exp. dieb. $B\frac{ac}{d}$

Homines 100. d
Aureos 2000. e

Quot dieb. exp.? ....

Quoniam igitur 100 Homines 4 aureos expendunt diebus B; iidem 100 Homines, 2000 aureos e, quot diebus expendent? Quoniam hìc rursum duo termini identici sunt, constat terminos quinque redactos esse ad tres b, B, e: qui cum ex indiciis jam traditis proportionem directam contineant, incognitus per simplicem directam proportionum regulam inveniri debet. Itaque secundus, nempe fractio speciosa, per B designata, ducatur in tertium e, ut traditur l. II. cap. VI. num. II., & gignat D, hoc est fractionem, per D designatam: qua divisâ per primum b, ut traditur lib. II. Cap. VII. n. II, (multiplicantur enim fractiones speciosæ, ut vulgares) provenit quotiens E, indicans 100 Homines, 2000 aureos, quot diebus expendant:

$$D \; \frac{ace}{d}$$

ac proinde E est terminus ille incognitus, qui in quæstione initio propositâ quærebatur. Atqui est idem cum A, ex vi constructionis invento. Ergo A est terminus incognitus quæsitus. *Q. E. D.*

$$E \; \frac{ac}{bd} \; 150$$

II. Proposita sit quæstio terminorum octo, vel plurium. Scriptores 4, paginas 250, linearum 20, scribunt diebus 8: igitur Scriptores 6, paginas 350, linearum 25, quot diebus scribent? Quoniam tam in primo, quàm tertio membro unus terminus aliquid agit circa alium, nimirum a circa b, & d circa e; liquet,

Scriptores.	4.	a
Scrib. pag.	250.	b
Versuum	20.	m
Diebus	8.	c

in

Scriptores	6. d
Paginas	350. e
Verſuum	25. n
Quot dieb. ſcr?....	

in quæſtione proportionem reciprocam contineri. Ordo igitur terminorum idem erit, qui ſupra: nimirum terminus agens *a*, non habens annexam ſibi quæſtionem, primus erit: hunc comites ejus *b*, & *m* ſequentur. Medium locum tenebit *c*, qui ſolitarius eſt, & termino incognito homogeneus. Huic proximus erit *d* agens alter, qui annexam habet quæſtionem, quem *e*, *n* ejus comites ſubſequentur. Ordine ſic conſtituto. Primò *a* ductus in medium *c*, & proximo *d* prætermiſſo, in omnes illius comites *e*, *n*, producat *a c e n*. Tum *d* ille jam prætermiſſus ductus in omnes comites primi *a*, nempe in *b*, *m* producat *d b m*. Deinde productum primum *a c e n* dividatur per ſecundum *d b n*. Quotiens P dabit numerum incognitum, qui quærebatur.

$$\frac{acen}{dbm} \quad \begin{matrix}1\\ P\text{——}9\\ 3\end{matrix}$$

Scriptores	6. d
Scrib. pag.	350. e
Verſuum	20. m

Diebus $A\frac{ace}{bd}$

Scriptores	6. d
Scrib. pag.	350. e
Verſuum	25. n
Quot dieb. ſcr?	

T 3 *Demon-*

Demonstratio.

SI tertius terminus *m* ponatur etiam loco septimo pro *n*, quæstio redigetur ad terminos quinque *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, cujus terminus incognitus, ut jam demonstratum est num. 1, erit A: ac proinde Scriptores 6, paginas 350, linearum *m* 20, scribent diebus A; igitur iidem 6 Scriptores, paginas etiam 350, sed linearum *n* 25, quot scribent diebus? hic quia utrimque *d*, *e* numeri Scriptorum, & paginarum iidem sunt: quæstio redacta est ad terminos tres, nimirum *m*, A, *n*, quæ quia directa est, duc A in *n*, ut traditur L. II. Cap. VI. num. II., & fiet Q. Quo diviso per *m*, ut traditur L. II. C. VII. nu. II. fiet quotiens R, indicans Scriptores 6 paginas 350 linearum 25, quot diebus absolvant; ac proinde est is, qui petebatur. Cum igitur R idem sit cum P, erit P numerus incognitus, in quæstione requisitus. *Q. E. D.*

$$A \frac{a\,c\,e}{d\,b} \qquad Q \frac{a\,c\,e\,n}{d\,b} \qquad P \frac{a\,c\,e\,n}{d\,b\,m} \qquad R \frac{a\,c\,e\,n}{d\,b\,m}$$

Scholium.

QUæstiones ad regulam compositam proportionum, tam eversam, quàm directam pertinentes per regulam simplicem proportionum bis institutam solvi posse, quamvis inutili circuitu, ex demonstrationibus jam allatis manifestum est; compositam videlicet directam,

per

per directam simplicem duplicatam; eversam verò, per simplicem eversam unam, & simplicem directam alteram. Id porro, haud scio, an satis fuerit ab Arithmeticis observatum, posse eversam compositam solvi per simplices duas, eversâ nulla interveniente: quod sic ostendo.

Resumatur quæstio supra numer. 1. proposita.

Homines 10
Aureos 4
Exp. diebus 3
Homines 100
Aureos 2000
Quot dieb. exp? ..

Homines 10
diebus 3
Exp. aureos 4
Homines 100
diebus 3
Quot aur. exp? ...

Ex qua desumatur prima quæstio simplex hujusmodi: Homines 10, diebus 3, expendunt aureos 4; homines ergo 100, diebus etiam 3, quot expendent aureos? formulam hic apposui, quam patet esse directam. Solutione adhibitâ, quartus provenit aurei 40. Altera jam quæstio sit etiam simplex: Homines 100 expendunt aureos 40, diebus 3; ergo iidem Homines 100, aureos 2000, quot diebus expendunt? Formulam inspice hic appositam, quam iterum patet esse directam.

Homines 100
aureos 40
exp. dieb. 3
Homines 100
aureos 2000
Quot dieb. exp.? ....

Solutione adhibitâ, proveniunt dies 150 pro numero incognito quæsito. Et poterunt quæstiones omnes eversæ com-

compositæ in hunc modum solvi. Simili modo etiam demonstrari potest, compositas directas solvi posse per unam directam simplicem, & eversam alteram.

Hæc ad plenam regulæ trium compositæ intelligentiam dicta sint. Cæterum inutilis ad praxim ille per duplicatam solutionem simplicem circuitus est, quando solutionem expeditiorem longè, ac breviorem jam tradidimus.

CAP. III.

Regula Societatum

DOcet numerum in partes dividere, datis numeris proportionales. Nomen sortita est a societatibus mercatoriis, in quibus usum habet permagnum. Sic verò instituitur.

Datorum summa primum locum teneat; secundum numerus distribuendus; tertium singuli datorum. Exerceatur deinde toties regula trium, quot sunt dati. Numeri inventi satisfacient quæstioni. Si numeris datis temporum diversitas sit adjuncta; prius in suum singuli tempus ducantur, quâm ad unam summam redigantur.

Quæstio I.

TRes Mercatores, initâ societate, lucrati sunt aureos 4500. Primus exposuit aureos 100, alter 150, tertius 200. Quantum ex lucro communi cuique debetur?

Manifestum est, lucra singulorum debere pecuniis in sortem collatis esse proportionalia; adeo-

adeoque lucrum commune 4500 aur. dividendum in partes, pecuniis collatis singulorum proportionales.

Sic igitur quæstio ordinabitur.

		Dati	quæsiti
Summa dat.	Lucr. com.	100 c.	1000 f.
450.	4500	150 d.	1500 g.
a	b	200 e.	2000 h.

Tum quære, si 450 aurei lucrantur aureos 4500; singuli dati, hoc est pecuniæ, a singulis in sortem datæ quot lucrantur aureos? Regulâ trium ter institutâ, provenient quæsiti. Conferenti 100 debentur 1000, conferenti 150 debentur 1500, & 2900 ei, qui 200 contulit.

Demonstratio.

EX vi constructionis, ut *a* est ad *b*, sic *c* est ad *f*, & sic *d* est ad *g*, & sic *e* est ad *h*. Ergo per XI. L. VI. *c* est ad *f*, ut *d* est ad *g*, & ut *e* est ad *h*. Igitur permutando per XVI. L. V., ut *c* est ad *d*, sic *f* est ad *g*; & ut *d* est ad *e*, sic *g* est ad *h*: & ex æquo per XXII. Lib. V. *c* est ad *e*, ut *f* ad *h*. Constat ergo fides operationis.

Quæstio II.

TRes Mercatores lucrati sunt aureos 9000. Primus contulit aureos 100 per menses 15; secundus 140 per menses 10; tertius 300 per-

per menses 7. Quantum singulis debetur?

Aurei a singulis collati ducantur in tempora, & numeri producti 1500, 1400, 2100 in unam colligantur summam 5000. Quæstio deinde sic ordinabitur.

		Dati	Quæsiti
Sum. dat.	Lucr. com.	1500	2700
5000	9000	1400	2520
		2100	3780

Demonstratio eadem, quæ supra. Quod autem multiplicatio pecuniæ in tempus valorem datorum non immutet; patet ex demonstratione regulæ trium compositæ directæ Capitis præcedentis.

CAP. IV.

Regula Alligationis.

DOcet hæc regula, res diversi pretii ita commiscere, ut mixtum habeatur pretii medii, pro arbitrio assignati. Sint duo genera argenti non puri, primi libra 1 valeat aureis 30, alterius 24. Scire cupio, quantum ex utroque sumere debeam, ut mixti una valeat aureis 28; vel ut habeam mixti libras 10, quarum una valeat aureis 28. Hic pretia data sunt 30, & 24: arbitrarium medium 28. Id numquam esse potest utroque dato majus, vel dato utroque minus; sed medium inter illa, aut alterutri æquale.

I. Si duo solum sint pretia data diversa 30, 24, ea scribe sub invicem, medium vero 28 ad

ad finiſtram. Tum pretia data alligentur inter ſe, hoc eſt comparentur ambo cum medio 28, ut duæ habeantur differentiæ, nimirum exceſſus 2 majoris dati 30 ſupra medium 28, quem ad dexteram minori dato 24 adſcribes; & defectus 4 minoris dati 24 a medio, quem adſcribes dato majori 30. Quæ omnia in formulâ hic appoſitâ exhibentur.

	Pret. mix.	Differ
	30	4
Pret. med, 28	24	2
		1
		6
		Sum. differ.

His peractis, regula proportionum inducitur toties, quot ſunt pretia data. In eâ primum locum tenebit ſumma differentiarum 6: ſecundum quantitas, ſive numerus mixti lib. 10: tertium ſingulæ differentiæ. Numeri inventi ſolvent queſtionem.

	Differ. 4.	lib. $6\frac{2}{3}$ — A
Sum. differ. 6 Mixti lib. 10.		
	Differ. 2.	lib. $3\frac{1}{3}$ — B

Igitur ex pretii majoris 30 aureorum argento accipiendæ ſunt libræ A; ex pretii minoris

libræ

libræ B; quæ simul efficiunt 10 libras argenti mixti, cujus pretium sit medium, aureorum nempe 28.

II. Cum plura, quàm duo, pretia dantur; singula binatim inter se alligentur, his tamen legibus servatis. I. Quæ alligantur, neque simul majora sint pretio medio, neque simul minora. II. Excessus majoris pretii dati supra medium adscribatur minori pretio; defectus autem minoris a medio apponatur majori.

III. His salvis, perinde est quocumque ordine inter se data pretia alligentur; & potest unum alligari sæpius, hoc est cum diversis, modo singula saltem alligentur semel. Unde fit, ut eadem quæstio multas solutiones admittat, ut infra demonstrabitur.

Alligationibus peractis, regula proportionum, ut supra, toties exercebitur, quot pretia sunt data. In eâ primum locum teneat summa differentiarum, secundum quantitas, seu numerus mixti, tertium differentiæ singulæ, aut, si uni pretio plures sunt adscriptæ, summæ earum singulæ.

Exemplum.

Libra 1 Garyophilli valet juliis 3, Piperis 4, Cinnamomi 6, Zingiberis 8, Croci 10. Quantum ex singulis debeo accipere, ut mixti libra 1 valeat juliis 7? vel ut habeam mixti libras 12, quarum una valeat juliis 7?

Pret.

		Pret. data	Differ.
	Garyoph.	a 3.	1. 3
Mixti Pret. med.	Piperis	b 4.	3. 1
7	Cinnam.	c 6.	1. 3
	Zingib.	d 8.	4. 3. 1.
	Croci	e 10.	4. 3. 1.

	Differ.	Quæsit.
	4?	$\frac{4}{28}$ m
Sum. diff. Mixti. 28. lib. 1.	4?	$\frac{4}{28}$ m
	4?	$\frac{4}{28}$ m
	8?	$\frac{8}{28}$ n
	8?	$\frac{8}{28}$ n

In hoc exemplo factæ sunt omnes alligationes possibiles, quæ sunt *ad*, *ae*, *be*, *bd cd*, *ce*. Igitur Garyophilli, Piperis, Cinnamomi ex singulis partes *m* unius libræ, & Zingiberis, ac Croci etiam ex singulis partes *n* unius libræ, dabunt mixti libram 1, pretii 7 Juliorum.

Hoc porro exemplum, præter solutionem jam datam, alias admittit, ut infra ostendetur. Accipe unius adhuc solutionis formulam. Alligationes sunt, *ad*, *bd*, *ce*

Pret.

		Pret. data	Differ.
	Garyoph.	a 3.	1.
Mixti	Piperis	b 4.	1.
Pret. Med.	Cinnam.	c 6.	3.
7	Zingib.	d 8.	4. 3.
	Croci	e 10.	1.
		Differ.	Quæsit
		1 ?	$\frac{1}{13}$ f
Sum. diff. Mixti		1 ?	$\frac{1}{13}$ f
13. lib. 1.		3 ?	$\frac{3}{13}$ P
		7 ?	$\frac{7}{13}$ q
		1 ?	$\frac{1}{13}$ f

Quæsiti *f*, *f*, *p*, *q*, *f* indicant, quot partes libræ ex singulis acceptæ conficiant mixti libram unam, pretii medii 7 Juliorum.

Examen ita fiet. Si Garyophilli una libra valeat 3 Juliis, libræ pars *f* quantum valebit? Rursum si 1 libra piperis, &c. Pretia per regulam trium inventa collige in unam summam, hæc pretio medio æqualis erit, si bene fueris operatus.

Demon-

Demonstratio, cum duo tantùm pretia diversa sunt alliganda.

		Differ. croci
	Pip. 4. a	2. e
Mixti Pret. medium 7. c		
		Diff. Pip.
	Croci 9. b	3. d
		5. f Sum. differ.

QUæstio sit: libra 1 piperis valet 4 Juliis, libra croci 9; quantum ex utroque sumere debeo, ut libra 1 mixta valeat Juliis 7? Cum ad solvendam quæstionem in regulâ trium primus locus debeatur summæ differentiarum, secundus numero mixti, sive ejus quantitati, tertius singulis differentiis reciprocè collocatis; demonstrandum est, totius mixti quantitatem, seu numerum, libram scilicet 1 ita esse ad croci, qui in mixto est, quantitatem, seu numerum incognitum; ut *f* summa differentiarum est reciprocè ad *d* differentiam piperis a pretio medio. Quod fiet hunc in modum.

Excessus *e* pretii unius libræ croci supra pretium medium unius libræ mixti precisè oritur a pipere, quod est in mixto: & defectus *d* pretii unius libræ mixti præcisè oritur a croco, qui est in mixto. Ergo excessus *e* pretii unius libræ croci est ad defectum *d* pretii unius libræ piperis, ut reciprocè piper, quod est in mixto,

to, ad crocum, qui eſt in mixto. Ergo componendo, ut e cum d eſt ad d, exceſſus nimirum croci cum defectu piperis ad piperis defectum; ita piper cum croco in mixto, hoc eſt tota mixti quantitas, libra nempe una eſt ad quantitatem croci in eodem mixto. *Q.E.D.*

Demonſtratio univerſalis, ſive duo tantum pretia, ſive quotlibet ſint alliganda.

HAnc rem non eſſe demonſtratu facilem, apparebit (niſi fallor) ex iis, quæ hic ſubjungam. Quæ attulere nonnulli, nullam demonſtrationis ſpeciem habent, ut ne ſciviſſe quidem videantur, in quo difficultas conſiſteret, aut quid demonſtrandum ſibi eſſet. Utar porro, quod jam feci ſæpius. Logiſticâ ſpecioſâ, quæ huic rei demonſtrandæ conducet plurimum. Quare hæc iis ſcribo, qui jam in eâ utcumque ſunt verſati.

I. Rerum quatuor miſcendarum pretia diverſa ſint b, c, d, e; pretium medium ſit a. Exceſſus e ſupra a eſt $e—a$; ex præcepto regulæ adſcribendus minori b. Defectus b ab a eſt $a—b$, apponendus majori e. Exceſſus d ſupra a eſt $d—a$, quem adſcribe minori c. Defectus c ab a eſt $a—c$, quem appone majori d. Valebit porro jam afferenda demonſtratio, quocumque tandem ordine, ſervatis tamen præſcriptis in regulâ conditionibus, inter ſe pretia diverſa alligentur.

Schema I.

	4. b		e— a
7. a	6. c	}	d— a
	8. d		a— c
	9. c		a— b

II. Ma-

II. Manifestum est, in qualibet differentiâ per excessum negari *a* pretium medium, affirmari verò pretia majora data *e*, *d*; quod ita exprimitur *e—a*, hoc est *e* minus *a*; *d—a*, hoc est *d* minus *a*. Rursum patet, in omni differentiâ per defectum affirmari *a* pretium medium, negari verò pretia data minora *b*, *c*; quod sic exprimitur *a—c*, *a—b*. Sed quia ex præscripto regulæ pretiorum, quæ alligantur, semper unum majus est pretio medio, alterum minus, aut certè æquale; tot semper erunt differentiæ, quot pretia majora, & minora

F

$$e - a + d - a + a - c + a - b$$

medio: quæ si in unam summam F colligantur, hæc duo infallibiliter evenient. Primò litteræ, pretia medio *a* majora designantes, semper reperientur affirmatæ: litteræ verò totidem, designantes pretia medio *a* minora, semper negatæ. Secundò *a*, medium pretium designans, toties negata reperietur, quoties affirmata; negata quidem in differentiis majorum pretiorum: affirmata verò in differentiis pretiorum minorum: ac proinde litteris *a* se mutuo tollentibus differentiarum summa erit G, constans semper litteris, data pretia designantibus.

G

$$e + d - c - b$$

III. Ut verò sciatur, quantum ex speciebus singulis diversorum pretiorum *b*, *c*, *d*, *e* sumi

 debeat,

debeat, ut ex iis permixtis una libra valeat pretio medio *a*; ex regulæ præscripto ponitur primo loco summa differentiarum, secundo 1 libra, tertio singulæ differentiæ; ac tum

Sum. diff.	lib.	Different.	*Schema II.*
		$e - a$	$\frac{e-a}{e+d-c-b}$ P ex b
		$d - a$	$\frac{d-a}{e+d-c-b}$ Q ex c
$e + d - c - b$	1	$a - c$	$\frac{a-c}{e+d-c-b}$ R ex d
		$a - b$	$\frac{a-b}{e+d-c-b}$ S ex e

per regulam trium inveniuntur quarti proportionales P, Q, R, S. Qui quidem, quòd secundus terminus sit unitas exhibentur, dividendo solum differentias singulas per differentiarum summam. Itaque quarti illi proportionales P, Q, R, S sunt fractiones, quarum communis denominator est differentiarum summa $e + d - c - b$, numeratores verò differentiæ singulæ, eo ipso ordine, quo num. I. fuere alternatim pretiis diversis *b*, *c*, *d*, *e* appositæ.

IV. Nunc, quia in regulâ asseritur, P, Q R, S indicare, quantum ex speciebus singuli diversorum pretiorum *b*, *c*, *d*, *e* sumi debeat ut una libra, ex iis mixta, valeat pretio medi *a*; utrumque ostendi debet, P, Q, R, S ef ficere

ficere unam libram, & P, Q, R, S ſimul valere pretio medio *a*. Primum patet ex XXIV. Lib. V. Nam ex conſtr. ſumma differentiarum eſt ad ſingulas differentias, ut 1 libra ad ſingulas, P, Q, R, S. Ergo, ut ſumma differ. eſt ad omnes ſimul differentias, ita una libra eſt ad omnes ſimul P, Q, R, S. Atqui ſumma differ. æquatur differentiis ſimul omnibus. Ergo etiam 1 libra omnibus P, Q, R, S æqualis eſt.

V. Alterum verò, in quo præcipua difficultas eſt, cujus gratiâ ſuperiora omnia num. I. II. III. præmiſimus, ſic oſtendo. Ut inveniantur pretia, ſeu valores ſingulorum P, Q, R, S, ſtatuatur in regula trium pro loco I. libra 1; ſecundo *b*, *c*, *d*, *e* pretia diverſa ſingularum ſpecierum; tertio ſingula P, Q, R, S, & dic: ſi 1 libra ſpeciei primæ valeat florenis *b*; unius libræ pars, à P deſignata, quantum valebit? & ſic in aliis.

Schema III.

lib. 1. } 4.b, 6.c), 8.d), 9.e

4.b $\quad \dfrac{e-a}{e+d-c-b} = P \qquad \dfrac{be-ba}{e+d-c-b} = V$

6.c) $\quad \dfrac{d-a}{e+d-c-b} = Q \qquad \dfrac{cd-ca}{e+d-c-b} = T$

8.d) $\quad \dfrac{a-c}{e+d-c-b} = R \qquad \dfrac{da-dc}{e+d-c-b} = X$

9.e $\quad \dfrac{a-b}{e+d-c-b} = S \qquad \dfrac{ea-eb}{e+d-c-b} = Z$

$$\dfrac{ea+da-ca-ba}{e+d-c-b} = N$$

Quoniam verò in primo loco habetur unitas, ut inveniantur quarti V, T, X, Z, oportebit solùm singula *b*, *c*, *d*, *e*, pretia ducere in singulos fractionum P, Q, R, S, numeratores, qui, ut ostendi num. III., sunt ipsæ pretiorum differentiæ, iisque supponere communem denominatorem *e*+*d*—*c*—*b*, quem ostendi n. III. esse differentiarum summam. Nunc fractiones ipsas V, T, X, Z jam inventas expendamus. Si harum numeratores in unam summam colligamus, reperiemus, eas particulas, in quibus *a* pretium medium designans non reperitur, se mutuò tollere: quod sic ostendo. Ut habeatur numerator ipsius V, nempe *be*—*ba*, pretium *b* ducitur in numeratorem ipsius P, hoc est in differentiam, quæ in schemate primo ipsi *b* fuit apposita: ea autem erat differentia pretii majoris *e*, nempe *e*—*a*, in qua, ut ostendi num. II., reperitur +*e*, hoc est *e* pretium majus affirmatum. Ergo in numeratore ipsius V necessariò reperitur +*be*, hoc est *be* affirmatum. Rursum, ut habeatur numerator ipsius Z, ducitur pretium majus *e* in numeratorem ipsius S, hoc est in differentiam *a*—*b*, quæ ipsi *e* in I. schemate fuit apposita: ea autem est differentia pretii minoris *b*, in qua, ut num. II. ostensum est, reperitur—*b*, hoc est pretium minus *b* negatum. Ergo in numeratore ipsius Z necessariò reperitur eadem particula *be*, quæ in V; sed jam negata, hoc est—*be*. Ergo in V, & Z duæ particulæ+*be*

Sche-

Schema III.

4.b	$\frac{e - a}{e + d - c - b}$	P	$\frac{be - ba}{e + d - c - b}$	V
6.c)	$\frac{d - a}{e + d - c - b}$	Q	$\frac{ed - ca}{e + d - c - b}$	T
1.lib. }				
8.d	$\frac{a - c}{e + d - c - b}$	R	$\frac{da - dc}{e + d - c - b}$	X
9.e	$\frac{a - b}{e + d - c - b}$	S	$\frac{ea - eb}{e + d - c - b}$	Z
			$\frac{ea + da - ca - ba}{e + d - c - b}$	N

& $-be$, in quibus a non reperitur, ſe mutuò tollunt. Eodem modo oſtendam, in numeratoribus fractionum T, & X particulas, in quibus non eſt a, (ſunt eæ hìc $+cd$, & $-dc$,) ſe invicem ſimiliter tollere.

Itaq; ſumma numeratorum in V, T, X, Z eſt $ea + da - ca - ba$, in cujus particulis ſingulis reperitur a: huic ſummæ ſi ſubſcribatur communis denominator $e + d - c - b$, erit fractio N par omnibus V, T, X, Z. Deinde, quia genita eſt ſumma hæc $ea + da - ca - ba$, pretia majora e, d ducendo in ſibi appoſitas pretiorum minorum differentias $a - c$, & $a - b$, in quibus ut oſtenſum num. II. a affirmatur, patet in particulis hujus ſummæ, ſigno $+$ affectis, neceſſariò reperiri pretia majora e, d. Pari modo, quia in procreatione hujus ſummæ $ea + da - ca - ba$ pretia minora c, b ducta ſunt

 in

in appositas sibi pretiorum majorum differentias $e-a$, & $d-a$, in quibus ostendi supra num. II. a negari, manifestum est in particulis hujus summæ, quæ est numerator ipsius N, signo $-$ affectis, necessariò reperiri pretia minora c, b. Ergo in numeratore ipsius N pretia majora e, d reperientur affirmata; minora verò c, b negata. Atqui supra num. II. ostensum est, etiam differentiarum summam $e+d-c-b$, quæ est fractionis N denominator, constare pretiis majoribus e, d affirmatis; minoribus vero c, b negatis. Ergo in fractionis N numeratore reperiuntur eædem litteræ, & iisdem signis affectæ, quæ in denominatore. Ergo si numerator dividatur per denominatorem, quotiens erit a. Si enim denominator ducatur in a, restituetur idem numerator. Ergo fractio N æquivalet ipsi a pretio medio. Atqui jam ostendi N æquari omnibus V, T, X, Z, valoribus ipsorum P, Q, R, S. Ergo P, Q, R, S simul valent pretio medio a. *Q. E. D.*

Quot solutiones diversas eadem quæstio admittat juxta praxim jam traditam.

ARithmetici Scriptores plerique afferunt, pretia data diversimodè alligari posse, ac proinde eamdem quæstionem plures solutiones admittere. Sed quantus solutionum diversarum sit numerus, & quo artificio illæ omnes exhibeantur, altum apud illos silentium est. Nimirum, ut demonstrationem ipsam hujus regulæ, ita & determinationem ipsius pulcherrimam,

mam, aut ignorarunt, aut certè immeritò neglexerunt.

Ejusdem igitur quæstionis solutiones omnes possibiles invenientur hunc in modum.

I. Vide quoties pretia data inter se binatim possint combinari diversimodè; hoc est inveniantur omnes diversi biniones, qui ex datis pretiis haberi possunt, ut trademus L. V. C. VIII. In quæstione num. II. supra quinque dantur pretia *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, quorum biniones diversi sunt 10.

II. Vide, quot ex his binionibus sint apti ad alligandum: ad quod requiritur, ut binionis utrumque membrum, neque simul majus sit, neque simul minus pretio medio. Ex 10 binionibus quæstionis, supra datæ, tantùm sex apti sunt; nimirum *ad*, *ae*, *be*, *bd*, *ce*, *cd*.

III. Vide, quis minimus sit alligationum numerus, ad quæstionem solvendam necessarius. Si multitudo pretiorum datorum par est, ejus semissis dabit minimum numerum alligationum. Si impar, ejus semissis, unitate aucta. Ratio est, quia singula pretia data saltem alligari debent semel. In exemplo nostro, quia 5 pretia dantur *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, minimus alligationum numerus, quo solvi quæstio potest, est 3.

IV. Inspice biniones aptos, num. II. inventos, & quære omnes eorum diversos terniones, & omnes eorum diversos quaterniones, & sic deinceps, incipiendo a minimâ specie, num. III. inventâ, usque ad proximè minorem numero aptorum binionum, ut tradetur L. V. C. VIII. In exemplo nostro, quoniam biniones apti sunt sex, num. II. reperti; oportebit, omnes eorum diversos reperire terniones, qui

sunt 20; & quaterniones, qui sunt 15; & quinterniones, qui sunt 6.

V. Inquire, quot ex binionum aptorum ternionibus, & quaternionibus &c. sint apti solvendæ quæstioni. Illi porro erunt apti, in quibus singula pretia data *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, reperiuntur; inepti, in quibus aliquod eorum deest. Singuli horum inventorum ternionum, quaternionum, &c. singulas dabunt quæstionis datæ solutiones, quibus eam adde, quam exhibet tota binionum aptorum summa. Præter has, nullæ erunt alligationes aliæ possibiles.

In exemplo nostro pretia dantur quinque, quæ artificio, jam explicato, comperies alligari posse modis diversis 25, ac totidem proinde exhiberi posse quæstionis datæ solutiones.

Al-

Alligatio.

1.	2.	3.	4.	5.	6.
ad	ad	ad	ae	ae	ae
bd	be	be	cd	bd	be
ce	cd	ce	bd	ce	cd

7.	8.	9.	10.	11.	12.
ad	ad	ad	ad	ad	ad
ae	ae	ae	ae	bd	bd
bd	bd	bd	be	be	be
cd	ce	cd	ce	cd	ce

13.	14.	15.	16.	17.	18.
ad	ad	ae	ae	ae	ae
bd	be	bd	bd	bd	be
cd	cd	be	be	cd	cd
ce	ce	cd	ce	ce	ce

19.	20.	21.	22.	23.	24.		
ad	ae	bd	be	cd	ce		ad
ae	bd	be	cd	ce	ad		ae
bd	be	cd	ce	ad	ae		bd
be	cd	ce	ad	ae	bd		be
cd	ce	ad	ae	bd	be		cd
							ce

Dixi ſupra in titulo hujus diſcurſus, *juxta praxim hactenus traditam*. Itaque, cum dicitur, præter ſolutiones, dicto modo inventas non plures eſſe poſſibiles, intellige ſi utamur modo alligationis conſueto, qui ſupra num. II. traditus eſt. Aliàs quæcumque quæſtio ad regulam alligationis pertinens, in qua plura duobus pretia

tia dantur, solutiones admittit infinitas. Quod sic demonstro.

Resumatur quæstio superior, in qua ex pretiis datis seligatur pro arbitrio unum pretio medio minus, puta 2, cum

			Differ.
		a. 3	2
Mixti		b. 4	
Pret. med.		c. 6	f
7.		d. 8	9 4
		e. 10	

quo reliqna b, c, d, e, tanquam unum, comparentur. Accipiatur quivis numerus f major, tum minimo ipsorum b, c, d, e, tum etiam medio 7; minor verò e maximo ipsorum. Ex regulâ alligationis, jam traditâ liquet, res pretiorum b, c, d, e ita misceri posse, ut una libra mixti ex illis valeat pretio f, 9 Juliis. Pro speciebus igitur b, c, d, e sumatur ex iis mixtum, cujus una libra valeat pretio f. Tum per regulam alligationis simplicem, numero 1. traditam, inveniatur mixtum x, z ex f, & a, cujus una libra valeat pretio medio 7. Liquet igitur, x, z libram esse mixti ex omnibus datis a, b, c, d, e; cum x, a mixtum sit ex a, & f, f autem mixtum ex b, c, d, e. Atque ita

			Differ.
		a. 3	2
Mixti			
Pret. med.		b. 4	
7.		c. 6	f
		d. 8	9 4
		e 10	

$2 \frac{2}{6} x$

6. lib. 1.

$4 \frac{4}{6} z$

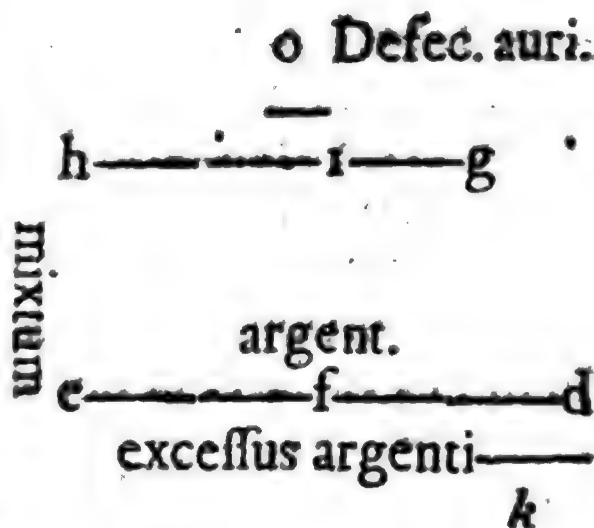
per

per assumptum numerum *f* majorem, cum minimo ipsorum *b*, *c*, *d*, *e*, tum ipso medio, minorem verò *e* maximo, una habetur solutio quæstionis, quæ toties variabitur, quoties pro *f* alius ejusmodi medius assumetur diversus. Atqui tales medii diversi assumi possunt, adhibitis fractionibus, infiniti. Ergo quæstionis datæ solutio variabitur infinities. *Q. E. P.*

Furtum Aurifabri in coronâ Hieronis Regis detectum.

CUm Hiero Syracusarum Rex coronam auream Diis vovisset, & Aurifaber, sublatâ portione auri, argenti tantundem substituisset, fraus ab Archimede detecta est, sed quo præcisè artificio, non satis constat. Varii sunt modi: qui regulâ alligationis utitur, omnium facillimus est.

Referam *a b*, *cd*, *hg* tres massas metalli singulas lib. 10; & sit aurea *hg*; *cd* argentea; *ab* verò ea, de qua dubitatur, an mixta sit ex auro, & argento.



Primò invenienda est ex Hydrostaticæ principiis trium massarum proportio quoad molem: ad quod minimè opus est, ut de facto habeantur massæ, aurea, & argentea, uti in Hydrostatica.

tica, si Deo placuerit, ostendam. Quod si moles *ab* media reperiatur inter auream *gh*, & argenteam *ed*, certum erit in *ab* admixtum esse argentum: qua verò proportione, per alligationis regulam innotescet.

Est enim, ut differentiarum summa *k*, *o* ad *o* differentiam, seu defectum molis aureæ *h g* à mixta *ab*; ita 10 libræ mixti *ab* ad libras argenti in *ab*.

Id verò eodem modo demonstratur, ut supra. Nam *k* excessus in mole argenti supra mixtam *ab* præcisè oritur ab auro, quod est in mixto; & defectus auri *h g* à mixto præcisè oritur ab argento, quod est in mixto. Ergo *k* excessus argenti *e d* est ad *o* defectum auri *h g*, ut reciprocè quantitas, seu pondus auri in 10 libris mixti *ab* est ad pondus argenti in eodem mixto. Igitur componendo totum mixti pondus argenti, nempe 10 libræ, est ad pondus argenti in mixto, ut *k* cum *o*, hoc est differentiarum summâ, est ad *o* auri defectum. *Q. E. P.*

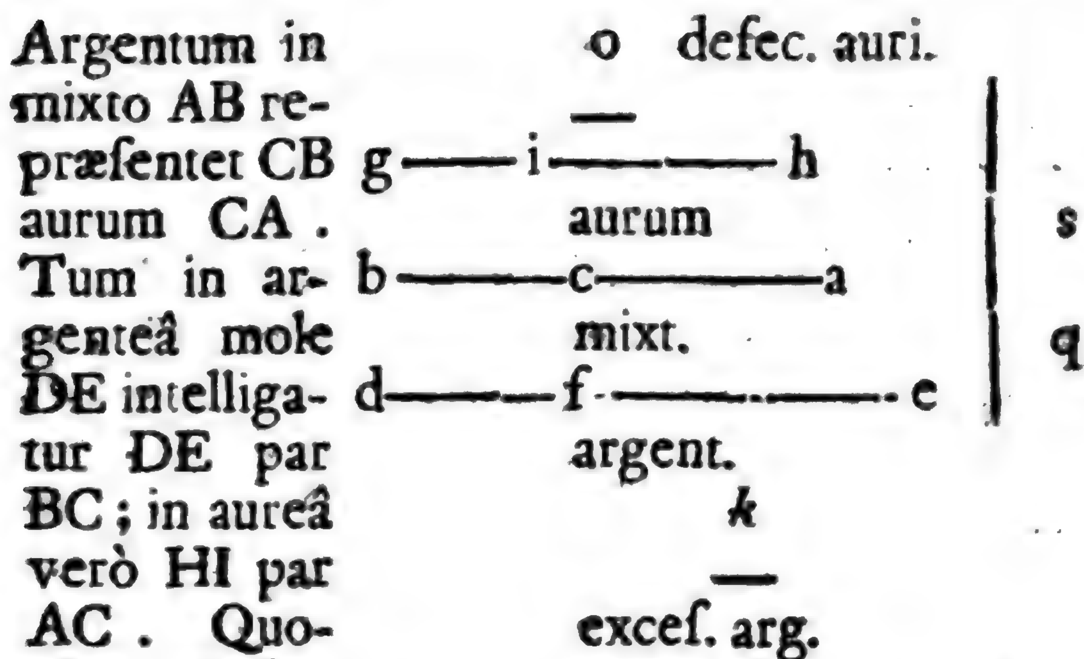
Si ergo *k* ponatur esse ad *o*, ut 15 ad 1, per regulam trium deprehendetur in *a b* massa 10 libr. esse unius libræ argenti 5 octavas.

Quod si detur mixtum ex metallis tribus, aut pluribus; nullo artificio deprehendi poterit, qua proportione sint commixta, quod ea possit infinities variari, ut demonstravi supra.

Alia Demonstratio.

QUamvis demonstratio jam allata mihi videatur clarissima esse; atque id ipsum pateat ex demonstratione universali supra: tamen quod in hac re demonstrandâ nobiles

biles Geometræ, & inprimis Marinus Ghetaldus in Archimede promoto, laborarint, visum est hoc ipsum alio modo, & faciliori, quàm sit ille Ghetaldi, demonstrare.



Argentum in mixto AB repræsentet CB aurum CA. Tum in argenteâ mole DE intelligatur DE par BC; in aureâ verò HI par AC. Quoniam ex hypothesi DE excedit AB per *K*; ablatis utrimque æqualibus DF, BC, etiam FE excedet AC, hoc est per constr. HI, per *K*. Pari modo, quia AB excedit GH per O; ablatis æqualibus AC, HI etiam BC, seu FD excedet GI, per O. Jam quia argentum BC, & argentum DF æqualia sunt mole, adeoque etiam pondere, & totum pondus AB toti ponderi DE per hyp. est æquale; erit quoque pondus reliquum auri AC, hoc est HI per const. æquale ponderi reliquo argenti EF. Igitur moles argentea EF est ad molem auream HI, ut reciprocè gravitas auri ad gravitatem argenti, ex. gr., ut QS ad S. Ergo dividendo *K*, qui est excessus EF supra HI, ut ostendi supra, est ad HI, ut Q ad S. Deinde, quia jam ostendimus, æqualia esse pondera EF, HI, cum etiam per hyp. æqualia sint tota ED, HG;

HG; liquet, reliqua FD, IG paria esse. Rursum igitur argentea moles DF est ad auream molem IG, ut reciprocè gravitas auri ad gravitatem argenti, hoc est ut QS ad S. Igitur dividendo O, qui est excessus FD per demonstrata superius IG, est ad IG, ut Q ad S. Atqui jam ostensum est etiam, ut Q est ad S, ita K esse ad HI. Ergo, ut K ad HI, sic O est ad

IG: & permutando, ut K est ad O, sic HI est ad IG; & componendo, ut K cum O est ad O, sic HG est ad IG; & (quia HG est moles homogenea), sic pondus HG ad pondus IG. Atqui pondus HG per hyp. est pondus AB; & pondus IG supra ostendi esse pondus argenti FD, seu CB. Ergo, ut K cum O ad O, ita mixti pondus AB est ad CB pondus argenti in eodem mixto. *Q. E. D.*

CAP. V.

Regula Positionis simplex.

PRo quæsito numero pone quemvis numerum, qui hypothesis appellabitur, eumque examina juxta tenorem quæstionis. Is si quæstioni

stioni non satisfaciat, in regulâ trium primum locum teneat numerus, ex decursu inventus, secundum hypothesis, tertium numerus in quæstione datus. Quartus ex his inventus solvet quæstionem.

Illæ igitur quæstiones, & solæ per unam positionem solvi possunt, ex quarum decursu inventus est ad hypothesim, ut numerus datus ad quæsitum.

Quæstio I.

TRes simul debent 7000. Primus autem debet duplo plus, quàm secundus, & hic triplo minus, quàm tertius. Singuli quantum debent?

Pone secundum debere 100. Ergo primus debet 200, tertius 300: quæ simul conficiunt 600. Deberent autem conficere 7000. Numerus inventus 600 sit primus in regula trium; hypothesis 100 secundus; datus in quæstione 7000 tertius. Ex his invenitur quæsitus A. Igitur secundus habuit A, primus B, tertius C, qui numeri simul juncti conficiunt 7000.

A	$1166\frac{2}{3}$
B	$2333\frac{1}{3}$
C	3500

Demonstratio hujus exempli, atque adeo totius Regulæ per se est manifesta.

Quæstio II.

HOstilis Exercitus tertia pars cæsa est, pars quarta capta, 1000 fugerunt. Quot ergo

ergo fuere universi? quot cæsi? quot capti?

Pro quæsito totius exercitus numero pone quemvis numerum, qui habeat datas partes, exemp. gr. 12. Igitur cæsi sunt 4, capti 3, & supersunt 5, qui fugerunt. Deberent autem fugisse 1000. Numerus ex decursu inventus 5 primus esto in regula trium, hypothesis 12 secundus, datus 1000 tertius. Ex his prodit quæsitus 2400, cujus tertia pars est 800; quarta pars capta est 600: 800 autem, & 6000 cum 1000 fugitivis conficiunt 2400.

Quæstio III.

Tertiam itineris partem confeci eques, quintam pedes, quæ simul efficiunt 50 leucas. Quot ergo milliaria totum iter complectitur? quot eques absolvi? quot pedes?

Pro itinere toto pone quemvis numerum datas habentem partes puta 15. Eques igitur confeci 5 milliaria, pedes 3, quæ simul efficiunt 8 milliaria. Deberent autem conficere 50. In regula trium primus est 8 numerus inventus, hypothesis 15 secundus, datus 50 tertius, ex quibus prodit quæsitus A. Totum ergo iter sunt milliaria A, cujus pars tertia equestris est B, pars verò quinta pedestris est C, quæ simul efficiunt 50 milliaria.

A	$93\frac{3}{4}$
B	$31\frac{1}{4}$
C	$18\frac{3}{4}$

Quæ-

Quæstio IV.

SI præsidium augeretur tertiâ sui parte, & adhuc 100 accederent, essent Milites 3000. In præsidio igitur quot sunt?

Hæc quæstio, & hujusmodi aliæ, sic propositæ, unicâ positione solvi nequeunt. Ut ergo per unam positionem hujusmodi quæstiones solvantur, numerus integer 100 fractionibus, quæ partes denominant numeri quæsiti, adhærens auferendus est a dato numero 3000, ut fiat 2900; atque interim quæstio sic formanda. Si præsidium tertiâ sui parte augeretur, Milites essent 2900: quot igitur sunt in præsidio? Operando ex præscripto regulæ, reperies in præsidio esse Milites 2175: hi enim aucti tertiâ sui parte, quæ est 725, fiunt 2900. Quod si numero sic invento 2175, præter tertiam sui partem, addantur 100, quæ a 3000 supra abstulimus, restituentur 3000, atque ita solutio obtinebitur quæstionis datæ.

Quæstio V.

ANtonius ætatem Caroli continet bis, & adhuc 4 annos, Paulus utriusqne ætatem complectitur, & insuper annos 6: omnes verò tres simul conficiunt 60 annos. Quot ergo singuli annos habent?

Neque hæc quæstio per unicam positionem solvenda est. Ponatur enim, Carolum habere annos 6. Horum duplo si addam 4, habebo 16 annos Antonii. Horum verò anni juncti, adjectis 6, dant 28 annos Pauli. Et tres simul

conficient annos 50. In regula trium primus esto 50, secundus 6 hypothesis, tertius 60 datus. Ex his pro quæsito annorum Caroli proveniet A, qui numerus non solvit quæstionem: sic enim Antonius haberet annos B; Paulus verò annos C; & tres simul conficient annos D. Deberent autem 60.

A	$7\frac{1}{5}$
B	$18\frac{2}{5}$
C	$31\frac{3}{5}$
D	$57\frac{1}{5}$

Certum igitur est, non esse hic numerum inventum ad hypothesim, ut datus est ad quæsitum: aliàs enim unicâ positione fuisset quæstio per regulam trium soluta. Verùm, cum sæpe non ita promptum sit discernere, utrum numerus ex positione inventus sit ad positionem, seu hypothesim, ut datus sit ad quæsitum; aliud erit hujus rei indicium assignandum.

Ex quo indicio colligatur, quæstionem unicâ positione solvi non posse.

QUotiescumque, ut cum numero ad libitum posito juxta quæstionis tenorem procedatur, assumi debet numerus aliquis, in quæstione datus, certus esto, quæstionem unicâ positione solvi non posse.

Exemplum sumatur in quæstione ultimâ superiori, in qua pro annis Caroli positus est 6. Ut jam cum hac hypothesi procedatur juxta tenorem quæstionis, assumi debent 4, ad duplicatos Caroli annos adjiciendi, ut habeatur ætas Antonii: qui numerus 4, quia datus est in quæstione, ea solvi non poterit unicâ positione.

Quod

Quod universaliter sic demonstro.

F		V
X	A	
Z	I	D

HYpothesis, seu positio falsa sit F: numerus verus, qui quæritur, esto V: numerus quispiam in quæstione datus, qui assumi debuit, ut cum falsâ hypothesi F quæstio decurri posset, sit A. Numerus datus, seu cognitus principalis, qui cum eodem A, & vero quæsito V, tenore quæstionis decurso, producitur, esto D. Manifestum est, A non esse ad F, ut A est ad V; cum F, & V ex hyp. sint inæquales. Alius ergo X major, minorve, quam A, erit ad F, ut A est ad V. Procedendo igitur cum V, & F, juxta quæstionis tenorem, producatur Z. Quoniam igitur V, & A ipsis F, & V sunt proportionales; manifestum est, si juxta ejusdem quæstionis tenorem, tam cum X, & F, quàm cum A, & V procedatur, productos inde numeros Z, & D fore ipsis F, & V proportionales. Sit jam I ille numerus, qui inventus est decurrendo cum falsâ positione F tenorem quæstionis, assumendo ad hoc datum illum numerum A. Quoniam igitur E, & A, ut ostendi supra, sunt inæquales; etiam Z, & I producti, seu inventi ex decursu quæstionis ille cum X, & F; hic cum A, & F, inæquales erunt. Quare cum supra demonstratum sit, Z esse ad E, ut D est ad V; non erit I, inventus ex decursâ quæstione cum falsâ hypothesi F, & uno ex datis A, ad hypothesim F; ut est datus numerus D, qui fit decurrendo quæstionem cum

Digitized by Google

vero quæsito V. Ejusmodi ergo quæstio non solvitur unâ positione. *Q. E. D.*

Scholium.

Cum numerus ex positione inventus, & in quæstione datus sunt similes plani, vel solidi, vel gradus altioris cujuscumque; neque tum quartus proportionalis per regulam trium inventus erit is, qui quæritur.

Disponendi sint 1875 milites acie rectangulâ, sic, ut latus sit triplo longius fronte. Quot in fronte disponendi? quot in latere? Pone 4 in fronte. Ergo in latere erunt 12, qui numeri ducti in invicem conficiunt 48. Deberent autem 1875. Sunt ergo 48 inventus, & 1875 similes plani, cum latera habeant similia. Ergo eorum proportio per XVIII. VIII. duplicata est proportionis laterum, quæ sunt ipsa hypothesis 4, & quæsitus. Igitur permutando, non est inventus 48 ex hypothesi 4 ad hypothesim 4, ut datus 1875 ad quæsitum. Ergo hæc quæstio per hanc regulam solvi nequit. Eodem modo id ipsum ostendam, cum inventus, & datus sunt similes solidi, ut continget in hac quæstione. Est murus, qui continet 13824 pedes cubicos, longitudo ejus est decupla altitudinis, hæc verò quintupla spissitudinis. Quæritur longitudo, altitudo, spissitudo.

Cæterum quæstiones hujusmodi aliis solvuntur viis, & facillimè per Algebram, cujus vis nullo quæstionum genere limitatur.

CAP.

C A P. VI.

Regula duplicis positionis.

HÆc regula præcedenti multo universalior est: omnes enim quæstiones, quæ per unam positionem solvi possunt, solvuntur etiam per duas; & præter has aliæ innumeræ, quæ per unam solvi non possunt.

Regula verò sic habet. Pro quæsito numero pone quemvis numerum, qui dicetur hypothesis, & cum eo procede, juxta tenorem quæstionis: cui si non satisfaciat, errorem hypothesi subscribe. Ponatur deinde alius quicumque numerus, cum quo similiter ratiocinare, juxta quæstionis sententiam, cui si non satisfaciat, errorem subscribe hypothesi suæ. Errores porro, si excessu peccant, notentur signo +; si defectu, signo —.

Ex duplici hac positione quæsitus numerus per regulam trium elicietur duobus modis.

Primus modus ex duplici errore eliciendi quæsitum.

IN regula trium primo loco statuatur differentia errorum, si similes ii sunt; errorum summa, si dissimiles: secundo loco differentia hypothesum: tertio loco error alteruter.

Quartus proportionalis, ex his tribus inventus, illi hypothesi, ex qua error tertio regulæ trium loco assumptus profluxit, addendus est, cum assumptus est error deficiens; subtrahendus, cum excedens, ut habeatur quæsitus.

Errores dicuntur similes, cum vel uterque est per defectum, vel uterque per excessum; dissimiles, cum unus est per defectum, alter per excessum.

Nota I. Expedit plerumque hypotheses assumere quàm minimas, imò unitatem, si fieri potest, & binarium, ut quàm brevissima sit operatio. II. Expediet item plerumque primam hypothesim solâ unitate augere, vel minuere, ut habeatur hypothesis altera, sic enim regula trium absolvetur solâ divisione. III. assumendæ hypotheses, quæ sine fractionibus, quantum fieri poterit, juxta tenorem quæstionis possint examinari: qua de causâ nonnunquam expediet duas notationes primas negligere.

Reliquum est, ut exemplis præcepta declaremus.

Quæstio I.

TRes lucrati sunt aureos 400. Lucrum secundi superat lucrum primi aureis 12. Lucrum verò tertii excedit lucrum secundi aureis 16. Quæritur lucrum singulorum.

Lucrum primi esto aureus unus. Ergo secundi lucrum sunt 13 aurei, tertii 29, quæ simul omnia conficiunt 43 aureos. Debebant autem conficere 400. Error igitur per defectum est 357.

Hyp. 1.		2. hyp.
err.—357.		—354 err.
	3	
	differ.	

Esto rursus lucrum primi, 2 aurei. Ergo secundi est 14, tertii 30, quæ simul efficiunt 46. Deberent autem 400. Erratum igitur est rursum defe-

defectu 354. Quoniam igitur uterque error defectus est, sic regulæ trium ordinandi erunt

3	1	—357. err. pri.
Differ. err.	Differ. hyp.	
		—354. err. sec.

termini, ex tribus 3, 1, 357 elicitur quartus 119, addendus primæ hypothesi 1, ut fiat 120 numerus quæsitus: ex tribus 3, 1, 354, quartus prodit 118, qui additus secundæ hypothesi 2, etiam dat 120 numerum quæsitum. Igitur primi lucrum sunt aurei 120: quibus adde 12, fit lucrum secundi 132. Huic quoque si addas 16, fit 148 lucrum tertii, qui tres numeri faciunt 400.

Aliter.

hyp. 1000	1001. hyp.
+ 2640	+ 2643

Finge primi lucrum esse 1000. Ergo secundi est 1012, & tertii 1028: quæ simul omnia faciunt 3040. Deberent autem 400. Erratum est ergo excessu 2640. Finge rursum primi lucrum esse 1001. Ergo secundi est 1013, tertii 1029: quæ tria simul efficiunt 3043. Deberent autem 400. Erratum est ergo rursus excessu 2643. Quare cum uterque error sit per excessum, regula trium ordinabitur, ut supra; sed quartus proportionalis ab hypothesi erit subducendus.

3	1	+ 2640. err. pri.
Diff. error.	Diff. hyp.	
		+ 2643. err. sec.

Ex tribus 3, 1, 2640 elicitur quartus 880, ſubtrahendus ab hypotheſi prima 1000, ut habeatur quæſitus 120. Ex tribus 3, 1, 2643 quartus prodit 881, qui ſubtractus ab hypotheſi ſecunda 1001, exhibet rurſus quæſitum 120.

Aliter.

hyp. 1.	1000. hyp.
—357	+2640.

Finge primi lucrum eſſe unum. Deprehendes, ut ſupra, errorem 357 per defectum. Finge rurſus lucrum ſecundi eſſe 1000. Error deprehendetur 2640 per exceſſum. Quoniam ergo diſſimiles errores ſunt, regula trium ſic ordinabitur.

2997	999	—357 err. pri.
Summa err.	Diff. hyp.	
		+ 2640. err. ſec.

Ex tribus 2997, 999, 357 habetur quartus 119, qui, quòd error fuerit per defectum, addendus eſt primæ hypotheſi 1, ut habeatur quæſitus 120. Ex tribus, 2997, 999, 2640 invenitur quartus 880 qui, quòd error fuerit per exceſſum, ſubtrahendus eſt ab hypotheſi ſecundâ 1000, & prodit idem quæſitus 120, qui ſupra.

Voluimus in hujus primæ quæſtionis ſolutione omnes regulæ caſus exponere. Quod hic feciſſe ſemel ſufficiet.

Quæ-

Quæstio II.

ÆTas Antonii ætatem Caroli continet bis, & adhuc 4 annos; Paulus utriusque ætatem complectitur, & annos adhuc 6. Omnes verò tres simul conficiunt annos 60. Quæ ætas est singulorum?

Hæc quæstio est illa, quam Cap. præced. huc rejecimus.

Ætas Caroli esto annus 1. Ergo Antonii ætas est 6: Pauli 13: & tres simul efficiunt 20. Deberent autem 60. Erratum est ergo defectu 40. Fingo rursum, annos Caroli esse 2. Ergo Antonii sunt 8: Pauli 16: & simul omnes efficiunt 26. Erratum igitur defectu 34. Sic ergo regula trium ordinabitur.

Hyp. 1.	2. hyp.
—40	—34

Err. diff.	Hyp. diff.	Error prim.
6	1	—40

Ex qua proveniet quartus A, addendus hypothesi primæ 1, ut fiat quæsitus B, ætas, nempe Caroli.

A $6\frac{2}{3}$

B. $7\frac{2}{3}$

Quæstio III.

COnficienda est certa pecuniæ summa. Si singuli conferrent 1 florenum, deficerent ad summam floreni 19. Si duos singuli, redundarent itidem 10. Quanta est summa, & quot Collatores? Fin-

Fingo Collatores esse 100, qui singuli conferentes 1 florenum conficient 100 Flor., quæ summa quia a summâ quæsitâ deficere debet florenis 10, summa quæsita esset 110. Si jam singuli ex Collatoribus 100 conferant Flor. 2, fient 200: a quibus si aufers 10, fit summa 190, quæ deberet esse æqualis priori 110. Sed aberrat per excessum 80. Fingo rursum Collatores esse 101, hi singuli conferentes 1 florenum conficiunt sum- Hyp. 100. 101. hyp.
mam 101, ac proinde + 80 + 81
summa quæsita esset 111.
Quod si conferrent singuli duos florenos, conficerent 202: a quibus si aufers 10, fit summa 192, quæ deberet æqualis esse summæ priori 111. Sed aberrat excessu 81. Sic ergo regula trium ordinabitur.

1	1	80
Diff. err.	Diff. hyp.	Err. pri.

Qua reperitur quartus 80, auferendus ab hypothesi prima 100. Quæsitus ergo Collatorum numerus est 20; quibus si addas 10, fit summa quæsita 30 flor. Si enim viceni singuli conferant 1, fit summa 20, quæ deficit a 30 per 10. Si verò singuli conferant 2, fit summa 40, quæ 30 excedit per 10.

Quæstio IV.

Regius Exercitus constat Hispanis, Belgis, Germanis. Germani sunt 10,000. Belgæ conficiunt tertiam partem Germanorum, & Hispanorum. Hispani dimidiam Germanorum,

rum,

rum, & Belgarum. Quot ergo sunt Belgæ? quot Hispani?

Pono Belgas esse 4000. Ergo Germani, & Hispani sunt 12000. Ergo quia Germani sunt 10000, Hispani erunt 2000: qui bis sumpti deberent conficere Germanos, & Belgas, nempe 14000. Conficiunt autem tantum, 4000. Erratum ergo est defectu 10000. Fingo rursum, Belgas esse 5000. Ergo Germani, & Hispani sunt 15000. Et quia Germani sunt 10000, Hispani erunt 5000: qui bis sumpti conficiunt 10000. Deberent autem conficere Germanos, & Belgas, nempe 15000. Erratum ergo est rursum defectu 5000. Sic ergo regula trium ordinabitur.

Hyp.	Hyp.
4000	5000
—10000	—5000

5000.	1000.	— 10000.
Diff. errorum	Diff. hyp.	Error primus.

Qua reperitur quartus 2000, addendus hypothesi primæ 4000. Sunt igitur Belgæ 6000, Hispani 8000.

Quæstio V.

SI ex Regio Equitatu ad hostilem transfugerent 900, æquales forent utrimque. Si vero 900 ex hostili ad Regium transfugerent, esset Regius decuplo major hostili. Quæritur numerus utriusque Equitatus.

Fingo Equitatum hostilem esse 2000. Si ex his transfugiant 900 ad Regios, restabunt

1100,

1100, & his decuplo tum major erit Equitatus Regius, ac proinde 11, 000 Unde ſi demam 900 transfugas, Regius Equitatus erit 10, 100. Si ex hoc transfugiant 900 ad hoſtilem, reſtarent ex Regiis 9200, & hoſtilis fieret 2900 exceditque tum adhuc Regius hoſtilem numerum 6300. Debebat autem æqualis eſſe. Erratum eſt igitur exceſſu 6300. Fingo deinde, hoſtilem Equitatum eſſe 2001, & diſcurrendo rurſum juxta tenorem quæſtionis, reperio errari per exceſſum 6309. Sic igitur regula trium ordinabitur.

Hyp.	hyp,
2000	2001.
+6300	+6309

9	1.	+6300.
Diff.err.	Diff.hyp.	Err.primus.

Ex qua reperitur quartus 700, a prima hypotheſi 2000 auferendus, quia error hypotheſeos eſt per exceſſum, ut fiat 1300. Hoſtilis ergo Equitatus eſt 1300, Regius 3100.

Hæc quæſtio ſic etiam proponi poterat. Si Petrus Paulo ex ſuis nummis det 9, habebunt æquè multos ambo. Si verò Paulus ex ſuis det 9 Petro, is decuplo habebit plures, quàm Paulus. Quot ergo nummos habuit Petrus? quot Paulus? Reperies Petrum habuiſſe 31, Paulum 13.

Fraus Aurifabri, de qua egi ſub finem Cap. IV. etiam per hanc regulam reperitur hunc in modum.

Quæ-

Quæstio VI.

Corona ex auro, & argento mixta sit 10 lib. Inquitatur, quantum aurum in aquâ fiat levius, quàm in aere. Fit proportione 18 ad 19. Hinc per regulam trium elicitur, massam auri 10 lib. in aquâ leviorem fieri proportione A ad 10. Inquiratur deinde, qua pro-

A $9\frac{9}{19}$ ad 10

A $9\frac{27}{589}$ ad 10

C $9\frac{25}{589}$ ad 10

B $9\frac{1}{31}$ ad 10

B $9\frac{19}{589}$ ad 10

portione argentum in aquâ fiat levius. Ea est 28 ad 31. Ex qua elicitur, massam argenti 10 lib. leviorem fieri in aquâ proportione B ad 10. Si jam Corona 10. lib. ex auro, & argento mixta imponatur aquæ, ea fiet levior proportione aliquâ inter priores mediâ. Ea sit C ad 10. Quæritur, quantum argenti sit permixtum.

Fingo admixtam esse libram 1. Ergo auri sunt

funt in Corona lib. 9. Jam fi auri libræ 10 funt in aqua libræ A; ergo 9 libræ auri in aquâ quot appendent libras? per regulam trium: reperio libras D. Rurfum fi 10 lib. argenti in aquâ funt lib. B; ergo 1 lib. argenti in Coronâ quid appendet in aquâ? reperio E. Igitur D, & E deberent conficere C pondus coronæ in aquâ.

$$D \frac{47952}{5890} \quad E \frac{5320}{5890}$$

$$F \frac{42632}{5890} \quad G \frac{10628}{5890}$$

Conficiunt autem F. Erratum eft igitur defectu G. Fingo deinde, admixtas effe libras argenti duas, & difcurrendo ut fupra, errorem reperio alterum L per exceffum. Sic igitur regula trium ordinabitur.

$$L \frac{2}{589} \text{ feu } \frac{20}{5890}$$

Sum. err.	Diff. Hyp.	err. fec.	
$\frac{10648}{5890}$	1.	$\frac{2}{589}$	$N \frac{12780}{6271672}$

Ex qua proveniet N, quæfita argenti quantitas in mixto.

Alter modus ex duplici errore eliciendi quæfitum.

SI errores funt fimiles, ducatur prima hypothefis in errorem fecundæ, & hypothefis fecunda in errorem primæ, & productorum differentia dividatur per differentiam errorum. Quotiens erit numerus quæfitus.

Si errores funt diffimiles, productorum fumma

ma dividatur per summam errorum.

Resumatur quæstio prima, in qua hypotheses erant 1, & 2; errores similes — 357, — 354. Factâ multiplicatione alternâ, sive in crucem, producta sunt 354, 714, quorum differentia 360 divisa per errorum differentiam 3, dat 120 numerum quæsitum.

Pri.	Sec.		
1	2		
—357	—354		
3			Producta
Err. Diff.		354	714
			360
			Diff.

In eâdem quæstione aliæ erant hypotheses 1000, & 1001, ex quibus errores provenerant similes + 2640, & + 2643. Ex hypothesium per errores alternâ multiplicatione producta sunt 2643000, 2642640, quorum differentia 360, divisa per 3 differentiam errorum, exhibet 120 quæsitum numerum.

Rursus in eâdem quæstione hypotheses fuere, 1 & 1000, ex quibus errores dissimiles —357, & + 2640. Ex his, in alternos errores ductis, producuntur 2640, & 357000; quorum jam summa (sunt enim errores dissimiles) 359640, divisa per summam errorum 2997, exhibet quæsitum 120.

Prior modus simplicior est, & plerumque expeditior.

De primi modi demonstratione.

QUod ad primum modum attinet, nullâ peculiari demonstratione opus est; quandoquidem supponitur, ut quæstio per hanc regulam

gulam ſolvi poſſit, uti differentia, vel ſumma errorum eſt ad differentiam hypotheſium, ita eſſe errorem ad numerum, qui ſuæ hypotheſi addendus, vel demendus eſt ad obtinendum quæſitum. Tantum igitur proportionalitas illa erit nonnihil declaranda.

Quæſitum ſit AB: hypotheſis prima AC, & illius error EF: hypotheſis ſecunda AD, & hujus error EG. Sint autem primò hypotheſes, vel ambæ ſimul minores quæſito, vel ſimul ambæ majores, ut errores habeantur ſimiles.

a———c——d——b

e—— g_f e

a——————b—de—

Si jam ſit, ut errorum differentia GF ad hypotheſium differentiam DC, ita primus error EF ad CB, quod primæ hypotheſi AC ad quæſitum AB deeſt, vel redundat, vel rurſum ſi ſit, ut errorum differentia GF, ad hypotheſium differentiam DC, ita ſecundus error EG ad DB, quod ſecundæ hypotheſi AD deeſt, vel redundat ad quæſitum AB, quæſtio per hanc regulam ſolvi poterit. Si tunc enim, quod præſcribit regula, differentiæ errorum, differentiæ hypotheſium, & errori alterutri quæratur quartus proportionalis, is illud erit, quod alterutri hypotheſi debet addi, vel demi, ut habeatur quæſitum. Quod quidem per ſe eſt manifeſtum.

Eſto deinde hypotheſis prima BC minor quæſito AB, ejuſdem error H per defectum; hypotheſis verò ſecunda AD major quæſito, ejuſque error K per exceſſum. Si jam, ut ſumma errorum HK, eſt ad hypotheſium differentiam CD, ita ſit H error primus ad CB defe-

defectum primæ hypotheseos AC a quæsito AB, vel secundus error K ad BD excessum hypotheseos secundæ AD supra quæsitum, solvetur quæstio per hanc regulam. Si enim, quod regula jubet, summæ errorum, differentiæ hypothesium, & errori alterutri quæratur quartus proportionalis, is erit hypotheseos a quæsito defectus, vel excessus, ut per se patet.

a——c——b——d
h k

Si porro quæras, quando sit errorum differentia, vel summa ad differentiam hypothesium, ut error ad hypotheseos suæ excessum, defectumve a quæsito; ac proinde quæ sub hanc regulam quæstiones cadant, quæ non. Respondeo, id ex ipsâ quæstionum naturâ esse dijudicandum. De quo quidem, quia multa dicere operæ pretium non est, e pluribus unum, alterumve indicium adferam obvium, & facile.

Si ex duabus hypothesibus plures habeantur errores, quàm duo, quæstio sub hanc regulam non cadet. Talis est hæc: invenire numerum, quo diviso per 2, 3, 4, 5, 6 restet semper unum, vel alii numeri dati: diviso verò per 7 restet nihil.

Si, cum uterque error est per defectum, error hypotheseos majoris non sit minor errore minoris; aut cum uterque error est per excessum, si error hypotheseos majoris non sit major errore minoris: scito rursum quæstionem non cadere sub hanc regulam. Talis est quæstio præcedens, imò etiam hæc. Invenire numerum, quo diviso per 7 restent 3: diviso

per 9 restet nihil. Pono 27 pro quæsito: hunc metitur quidem 9, sed 7 dividens relinquit 6. Deberet autem relinquere 3. Error igitur est 3 per excessum. Pono deinde pro quæsito 54, majorem primâ hypoth. 27. Hunc 9 metitur, at 7 dividens relinquit 5. Deberet autem solum 3. Error igitur etiam per excessum, & minor errore primo. Non cadit ergo quæstio sub hanc regulam.

Tandem, ne nimium hìc intricentur Tyrones, generale indicium illis accomodatum istud esto. Si semel cum duabus hypothesibus ex præscripto regulæ operatus quæsitum non obtineas, neque per alias quascumque hypotheses quæsitum obtinebitur.

Modi secundi demonstratio.

Casus I.

QUæsitum esto AB: hypothesis prima AC, secunda AD, utraque quæsito minor: error primæ EF, secundæ EG. Productum ex hypothesi prima AC in errorem secundum EG, dicatur AC in EG. Productum ex hypothesi secunda AD in errorem primum EF, æquatur *a* his quatuor, AC in EG; AC in GF; CD in EG; CD in GF. Quia igitur AC in EG utrique producto commune est, erit

a —— c —— d —— b
e — *g* —— f

a collig. ex 1. 2.

AC

Productorum differentia.	Æ	AC in GF CD in EG CD in GF	quæ X dicantur.
Dein AB in FG	Æ	[b]AC in GF CD in GF DB in GF	quæ dicantur Z.

b 1. 2.

Jam quia ex ſuppoſitione GF differentia errorum eſt ad CD hypotheſium differentiam, ut error primus EF ad CB hypotheſeos primæ defectum a quæſito AB: etiam permutando erit GF ad EF, ut CD ad CB. Ergo & GF eſt ad EG, ut CD ad DB. Ergo in aggregato Z, GF in DB, ſeu DB in GF æquatur CD *c* in EG, in aggregato X. Quare cum reliqua utrimque communia ſint, erunt tota X, & Z æqualia. Atqui jam oſtenſum eſt Z æquari AB in GF, X verò æquari differentiæ productorum. Ergo etiam AB in GF æquatur differentiæ productorum. Atqui AB in GF diviſo per GF quotiens eſt AB. Ergo etiam differentiâ productorum diviſâ per GF differentiam errorum quotiens eſt AB, ipſum videlicet quæſitum. *Q. E. D.*

c 19. 7.

Caſus II.

ESto jam hypotheſis utraque AC, AD major quæſito AB. Productum ex hypotheſi primâ AC in errorem ſecundæ EG, dicatur AC in EG.

AC in EG	Æ	AB in EG	quæ di-
		BD in EG	cantur
		DC in EG	P

Productum ex hypothesi secundâ AD in errorem primæ EF, dicatur AD in EF.

AD in EF	Æ	AB in EG	quæ di-
		AB in GF	cantur
		BD in EG	Q
		BD in GF	

a——b——d——c
e——g——f

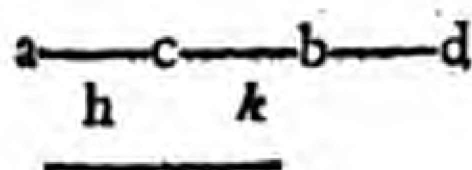
Nunc quia ex suppositione GF differentia errorum est ad DC differentiam hypothesium, ut primus error EF ad BC excessum hypotheseos primæ AC supra quæsitum AB, (aliàs enim quæstio per hanc regulam solvi non posset) etiam permutando erit GF ad EF, ut DC ad BC. Ergo etiam GF est ad EG, ut DC ad BD. Ergo GF in BD, seu BD in GF æquatur DC in EG. Quare si in aggregato Q pro BD in GF substituatur DC in EG, erit

AD in EF	Æ	AB in EG	quæ di-
		AB in GF	cantur
		BD in EG	R
		DC in EG	

Quare si conferantur R, & P, invenietur productorum differentia esse AB in GF. Atqui AB in GF, diviso per GF, quotiens est AB. Ergo differentiâ productorum divisâ per GF erro-

errorum differentiam, quotiens est AB, ipsum nempe quæsitum. *Q. E. D.*

Casus III.



Sit denique prima hypothesis AC minor quæsito AB; at secunda AD major. Productum ex hypothesi primâ AC in errorem secundum *K*, dicatur AC, in *K*. Productum ex AD hypothesi secundâ in errorem primum H æquatur, AC in H; CB in H, BD in H. Ergo

Summa productorum.	Æ	[a] AC in *K* AC in H CB in H BD in H	quæ vocentur. S.	[a] collig. ex 1. 2.
Dein AB in H*K*	Æ	AC in *K* AC in H CB in H CB in *K*	quæ vocentur. V	

Nunc quia per hypothesim H*K* errorum summa est ad CD differentiam hypothesium, ut H error primus est ad CB hypotheseos primæ AC defectum à quæsito AB; erit etiam permutando, dividendo, ac invertendo H ad *K*, ut CB ad BC. Ergo in S, & V, BD in H, & CB in *K* [b] æqualia sunt. Quare cum reliqua utrimque communia sint, erunt tota S, & V æqualia. Quare cum V sit AB in H*K*, & S sit summa productorum; etiam AB in H*K* sum-

Vide etiam schemata pag. præc.

[b] 19. 7.

mæ productorum æqualis erit. Atqui AB in HK, diviso per HK, quotiens est AB. Ergo etiam productorum summâ divisâ per HK summam errorum, quotiens est AB, ipsum nempe quæsitum. *Q. E. D.*

Scholium.

QUæstio, quam negavi supra per regulam duplicis positionis solvi posse, celebratur ab Arithmeticis, nec tamen solvitur ab ullo, quem legerim. Quare visum est in gratiam Studiosorum illius solutionem hic apponere.

Lemma.

DAtum numerum A, sæpius positum, dividere per datum B, donec residuus sit datus D.

D	3.	
A	B	
9	7	
2. 4. 6. 1. 3.		
9. 9. 9. 9. 9. 45		C
7 7 7 7 7		

Hoc ita fiet: primo A 9 diviso per B 7, restat 2, scribe supra primum 9: ac mente addito ad secundum 9, ut fiat 11 Divide per 7, restabit 4, quæ scribe supra secundum 9, ac adde ad tertium 9, ut fiat 13; quæ rursum divide per 7, restabit 6. Sic deinceps procedendo, reperies hic ex quintâ divisione relinqui D 3, numerum datum.

Eo-

Eodem modo operaberis, si dentur duo numeri dividendi A, & X, quorum primus A tantùm semel, alter X sæpius ponitur. In exemplo apposito post quintam divisionem relinquitur numerus datus D 2.

A		X	D 2.	
45.		63.		
		B 5		
0	3	1	4	2
45.	63.	63.	63.	63.
5	5	5	5	5

Quod si contigat bis relinqui eumdem numerum, diversum a dato, quæsitum lemmatis erit impossibile. In primo exemplo, in quo 9 sæpius positus dividitur per 6, tam post primam, quàm post tertiam divisionem restat 3: liquet igitur, continuatá ulterius divisione, semper eadem fore residua 3.0.3. In secundo exemplo, in quo 9, & 8 sæpius positus dividuntur per 6, tam post primam divisionem, quàm post quartam restat 3: quare si continuetur divisio, eadem semper recurrent residua 3. 5.1: ac proinde si residuum quæsitum in lemmate sit ab his diversum, lemma erit impossibile. Ratio per se est manifesta.

3	0	3	0	3
9	9	9	9	6
6	6	6	6	

3	5	1	3	5	1	3
9	8	8	8	8	8	8
6	6	6	6			

PROBLEMA I.

INvenire numerum K, quo diviso per datos quoscumque A, B; C, sint residua data V, X, Z, diviso autem per alium datum D, restet nihil.

Inveniatur F multiplex numeri D talis,

ut eo diviso per C, restet Z: quod fiet, si D toties ponatur, ac dividatur per C, donec restet Z, ut expositum est in lemmate: F enim tam multiplex est ipsius D, quoties D positus est.

	A	B	C	D.			N.315		63M
	8.	5.	7.	9.					
	5	2	3		K		G	F	
	V	X	Z		1557.		297.	45.	
2	4	6	1	3	0	3	1	4	2
9.	9.	9.	9.	9.	45	63	63	63	63
7	7	7	7	7	5	5	5	5	5
			1	4	7	2	5		
			297.	315.	315.	315.	315.		
			6	8	8	8	8		

Si jam F diviso etiam per B, non etiam restat X, inveniatur per XXXVI. Lib. VII. minimus, quem D, & C metiuntur, qui sit M: tum inveniatur numerus G compositus ex F, & multiplo ipsius M talis, ut eo diviso per B restet X. Id verò fiet, si primò ponatur F 45, ac deinde toties M 63, donec his per B divisis restet X: G enim æquatur F, & tam multiplo ipsius M, quoties M positus est.

Quod si jam G etiam diviso per A, non restet etiam V, quæratur per XXXVIII. Lib. VII. numerus N minimus, quem tres D, C, B, metiuntur inveniatur deinde K compositus ex G, & multiplo ipsius Natalis, ut eo diviso per A, residuus sit V: hoc verò obtinebitur, si primò ponatur G 297, ac deinde toties N 315, donec his divisis per A, restet V: K enim æquatur G, & tam multiplo ipsius N, quoties N positus est. Dico

Dico K esse quæsitum, & quidem minimum.

Demonstratio.

EX constr. D metitur M, ac proinde & multiplum ipsius M. Metietur etiam D multiplum b *suum F. Ergo D metitur G composi-* b const.
tum ex F, & multiplo ipsius M. Metitur autem D c *etiam N, adeoque & multiplum ejus.* c const.
Ergo D metitur compositum d *ex G, & mul-* d const.
tiplo ipsius N. Quod erat è quæsitis primum.

Deinde C dividens F e *relinquit Z. Atqui* e const.
C f *metitur M, adeoque & multiplum ejus.* f const.
Ergo C dividens G, compositum g *ex multiplo* g const.
ipsius M, & ex F, etiam relinquit Z. Rursum C metitur N, adeoque & ejus multiplum. Ergo C dividens K, compositum ex multiplo h *ipsius* h const.
N, & ex G, etiam relinquit Z. Quod erat secundum.

Rursus per constr. B dividens G relinquit X. Atqui B metitur i *N, adeoque & ejus mul-* i const.
tiplum. Ergo B dividens K, compositum k *ex* k const.
multiplo ipsius N, & ex G, relinquet X. Quod erat tertium.

Denique per construct. A dividens K relinquit V. Quod erat postremum. Quæsitus igitur numerus est K. Quod verò etiam minimus sit, ex constructione patet. Sumpsimus enim M minimum, quem metiuntur D, C; & N minimum, quem metiuntur D, C, B.

Determinatio problematis patet ex lemmate.

PRO-

PROBLEMA II.

Iisdem positis, numerum, qui problemati satisfaciat, secundum, & tertium, & omnes ex ordine reliquos infinitos reperire.

a 38. 7 *Inveniatur O minimus, a quem omnes divisores dati A, B, C, D metiuntur. Hic O additus primo K, superiùs invento, dabit secundum K+O, additus verò secundo, dabit tertium K+2O. Et sic deinceps.*

Vide etiam schema pag. præc.

Demonstratio.

K	K+O	K+2O
1557		
	O	

Quoniam A per constr. metitur O, & per præced. dividens K relinquit V; etiam A metiens K+O relinquit V. Rursum quia B metitur b *O, dividens verò* c *K relinquit X; etiam B dividens K+O relinquit X. Pari modo ostendam, si C dividat K+O relinqui Z. Denique, quia D metitur O ex const. & K per præced., metietur etiam K+O. Ergo K+O ex iis est, qui problemati satisfaciunt: & quidem secundus, quod ex K primo, & ex O omnium divisorum A, B, C, D minimo dividendo sit procreatus.*

b const.
c const.

Eodem modo demonstrabitur, tertium esse K+2O, & sic deinceps in infinitum.

PROBLEMA III.

Si numerus quæratur, quo diviso per quotcumque datos A, B, C, residuus sit semper

per idem numerus V; diviso autem per alium datum D, restet nihil, brevior erit operatio hunc in modum.

	A	B	C	D
	8.	4.	7.	6.
Q	R			4 0
56.	114.	2.	56.	56.
		V	6.	6.
		2		

Inveniatur a minimus Q, quem A, B, C[a] *metiuntur. Tum inveniatur R, compositus ex V, & multiplo ipsius Q, talis, ut eo diviso per D, nihil remaneat; quod obtinebitur, si primò ponatur V 2, ac dein toties Q 56, donec his divisis per D, nihil supersit. Q enim toties acceptus, quoties positus fuit, una cum V, dabit R.* [a] 38. 7.

Dico R esse quæsitum.

Demonstratio.

QUoniam *A, B, C metiuntur* b Q, *metientur etiam multiplum ipsius* Q. *Ergo A, B, C dividentes R, compositum ex multiplo ipsius* Q, *& ex V; relinquunt V. D autem dividens R, nihil* c *relinquit. Ergo R est quæsitus.*

[b] const.

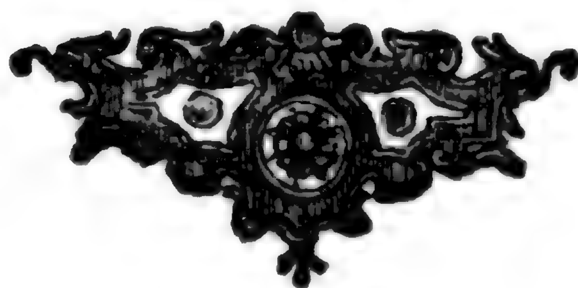
[c] const.

Secundus, tertius, quartus, & reliqui omnes sine termino, qui problemati satisfaciunt, reperientur, ut Probl. II.

ARITHMETICÆ PRACTICÆ LIBER V.

DE PROGRESSIONIBUS.

QUintum hunc, & postremum Arithmeticæ librum progressionibus dare visum est. Eas alii obiter ferè tantùm, & quasi appendicis instar tractare solent. Sunt tamen ejusmodi, sive theoriam spectes, sive praxim, ut contemplationem longiorem, accuratioremque mereantur.



DE

DE PROGRESSIONE ARITHMETICA

CAPUT I.

Progressionis Arithmeticæ affectiones.

PRogressio Arithmetica est series numerorum se mutuò æquali excessu superantium. Primus seriei terminus potest esse quicumque; excessus quoque terminorum quilibet esse potest; etiam æqualis primo termino.

1	2	3	4	5	6	7	8	9.	&c.
1	3	5	7	9	11	13	15	17.	&c.
3	6	9	12	15	18	21	24	27.	&c.

THEOREMA I.

a	b	c	d	e	f	g	h	*
5	8	11	14	17	20	23	26	29

excess. x 3.

QUilibet terminus sprogressionis Arithmeticæ continet primum, hoc est minimum terminum a, *& toties communem excessum* x, *quot post primum usque ad ipsum & inclusivè sunt termini.*

Patet ex definitione progressionis Arithmeticæ.

Corol-

Corollarium.

HAbetur igitur maximus terminus, si ex-
cessus ducatur in numerum terminorum
unitate mulctatum, & producto addatur mi-
nimus.

THEOREMA II.

*IN progressione Arithmeticá summa duorum
quorumlibet terminorum* c, g *æquatur
summæ quorumlibet duorum, ab ipsis æquali-
ter distantium* a, *k.*

Demonstratio.

QUoniam *k* superat *b* excessu *x*, eodem,
quo *b* superat *a*; si *k* det suum *x* ipsi *a*
patet *k* futurum æquale ipsi *b*, & *a* ipsi *b*. Igi-
tur *a* cum *k* æquatur *b* cum *b*. Eodem modo
ostendam *b* cum *b* æquari *c* cum *g*. Ergo *a*
cum *k* æquatur *c* cum *g*. *Q. E. D.*

THEOREMA III.

*PRogressionis Arithmeticæ terminus quicum-
que dimidius est summæ duorum, a se
æqualiter distantium.*

De-

Demonſtratio.

	a	b	c	d	e	f	g	h	k
	5	8	11	14	(17)	20	23	26	29
				excef. x					
				3					

ACcipiatur terminus *e* quilibet. Quoniam tam *f* ipſum *e*, quàm *e* ipſum *d* excedunt exceſſu *x*; manifeſtum eſt, ſi *f* ſuum *x* det ipſi *d*, omnes tres *f*, *e*, *d* fore æquales. Ex quo patet, *e* dimidium eſſe ſummæ duorum *d*, *f*. Atqui per Theor. præced. ſumma *d*, *f* æquatur ſummæ *c*, *g*; & ſummæ *b*, *h*; & alteri cuilibet ſummæ duorum, æqualiter utrimque ex *d*, & *f* diſtantium. Ergo etiam *e* dimidius eſt ſummæ duorum, a ſe æqualiter diſtantium. *Q. E. D.*

THEOREMA IV.

IN qualibet progreſſione Arithmeticâ omnium terminorum ſumma habetur, I. Si ſumma minimi, & maximi termini ducatur in numerum terminorum, & productum per 2 dividatur.

Vel II. Si ſumma minimi, & maximi ducatur in ſemiſſem numeri terminorum.

Vel III. Si ſemiſſis ſummæ minimi, & maximi ducatur in numerum terminorum.

Demonſtratio.

a b c d e f g h

SIT primò numerus terminorum par. Summæ binariæ *a*, *h*; & *b*, *g*; & *c*, *f*; & *d*, *e* ſunt inter ſe æqua-

æquales per Theor. II. Earum autem numerus æqualis est dimidio numero terminorum. Ergo una ex his summis binariis, puta *a*, *h*, ducta in dimidium numerum terminorum, æquabitur omnium terminorum summæ, (quod erat secundum;) ac proinde ducta in totum numerum terminorum erit summæ omnium dupla. Ex quo patet primum, & ex illo tertium.

Esto deinde numerus terminorum impar, ut in schemate Theor. III. Cum summæ omnes binariæ *a*, *k*; & *b*, *h*; & *c*, *g*; & *d*, *f* sint inter se æquales per Theor. II. patet ex discursu præcedenti, unam ex his, puta *a*, *k*, ductam in numerum terminorum *a*, *b*, *c*, *d*, *f*, *g*, *h*, *k*, qui in hoc exemplo, medium *e* omittendo, est 8, duplam fore eorumdem terminorum. Atqui summa *a*, *k* dupla est medii *e* per Theor. III. Ergo summa *a*, *k*, ducta in totum terminorum numerum 9, qui jam propter medium assumptum est priori 8 unitate major, dupla est omnium terminorum. Ex quo patet primum; ex illo autem facilè patebunt secundum, & tertium.

THEOREMA V.

Cum numerus terminorum est impar; medius in numerum terminorum ductus exhibet summam omnium terminorum.

a	b	c	d	(e)	f	g	h	k
2	7	12	17	(22)	27	32	37	42.

De-

Demonstratio.

MEdius *e* dimidius est summæ extremorum *a*, *k* per Th. III. Atqui summa extremorum *a*, *k*, ducta in numerum terminorum, per Th. IV. dupla est summæ omnium. Ergo medius *e* ductus in numerum terminorum æqualis est omnium summæ. *Q. E. D.*

THEOREMA VI.

IN progressione naturali numerorum 1, 2, 3, 4, 5; *&c. si ultimus* 8 *ducatur in numerum proximè majorem* 9; *producti* 72 *semissis est summa omnium*.

1 2 3 4 5 6 7 8.

Demonstratio.

NUmerus ultimo proximè major, quia tantùm unitate major est, æquatur summæ ultimi, & primi, qui est unitas. Deinde numerus ultimus in progressione naturali est ipse terminorum numerus. Ducendo igitur ultimum in proximè majorem, duco summam primi, & ultimi in numerum terminorum. Atqui sic producitur duplum summæ omnium per Theor. III. Ergo etiam cum ultimus in proximè majorem ducitur, duplum producitur summæ omnium. Producti ergo semissis est omnium summa. *Q. E. D.*

THEOREMA VII.

IN progressione naturali imparium 1, 3, 5, 7, &c. summa tota æqualis est quadrato numeri terminorum.

a 1
1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21
excess. 2.

Demonstratio.

PEr Theor. IV. hæc summa tota æqualis est producto ex dimidio summæ extremorum *a*, & *l* in numerum terminorum. Atqui dimidia summa extremorum *a*, *l* est par numero terminorum,. adeoque productum illud est quadratus numeri terminorum. Ergo summa tota æqualis est quadrato numeri terminorum.

Quod autem semissis summæ extremorum *a*, *l* sit par numero terminorum, sic ostendo. Per Theor. I, *l* continet *a* unitatem, & toties excessum communem 2, quot sunt termini, dempto uno. Ergo si ad *l* adjiciatur *a*, nempe unitas, adhuc semel, continebit summa *a*, *l* toties 2, quot sunt termini; ac proinde dupla est numeri terminorum. Ergo semissis summæ *a*, *l* numero terminorum æqualis est.

THEO-

THEOREMA VIII.

IN progreſſione naturali numerorum parium 2, 4, 6, 8, 10, &c. omnium ſumma æqualis eſt numero terminorum, ducto in numerum unitate majorem.

excef. 2.

a k

2 4 6 8 10 12 14 16 18 20.

Demonſtratio.

PEr IV. Theor. hæc tota ſumma æquatur ſemiſſi ſummæ extremorum *a*, *k* ductæ in numerum terminorum. Atqui ſemiſſis ſummæ *a*, *k* eſt unitate major numero terminorum. Ergo tota ſumma æquatur numero terminorum, ducto in numerum unitate majorem.

Quod verò ſemiſſis ſummæ *a*, *k* ſit unitate major numero terminorum, ſic demonſtro. Quia hic exceſſus communis eſt ipſe primus terminus *a*, manifeſtum ex Theor. I, *k* toties continere *a* nempe 2, quot ſunt termini; ac proinde duplum eſſe numeri terminorum. Ergo ſumma ipſorum *a*, *k* excedet duplum numeri terminorum exceſſu *a*. Ergo ſemiſſis ſummæ *a*, *k* excedet numerum terminorum dimidio ipſius *a*, hoc eſt unitate.

THEOREMA IX.

CUjuſcumque progreſſionis Arithmeticæ numerus terminorum habetur, ſi a maxi-

m. dematur minimus, & residuum per communem excessum dividatur; addita quotienti unitate.

Demonstratio patet ex Theor. I.

CAP. II.

Progressionis Arithmeticæ Problemata.

PROBLEMA I.

PRogressionem Arithmeticam continuare, uno termino, & excessu datis.

a	b	c	d
1	4	7	10
excess. 3.			
x			

Continuabitur ascendendo, si excessus *x* termino dato *a* addatur, ut fiat *b*; & ad *b* rursus *x*, ut fiat *c*; & sic deinceps. Continuabis verò descendendo, si a termino dato, puta *d*, demas excessum *x*, ut fiat *c*; & ab *c* rursus auferas *x*, ut fiat *b*; & sic deinceps.

PROBLEMA II.

MInimo termino, excessu, & terminorum numero datis, invenire maximum.

Excessum duc in numerum terminorum unitate mulctatum, & productum adde minimo termino, summa dabit maximum. Patet ex Theor. I. & Corollario.

PRO-

PROBLEMA III.

Minimo termino, excessu, & numero terminorum datis, invenire summam progressionis.

Per Probl. II. inveni maximum, si datus non sit. Deinde summam extremorum (id est minimi, & maximi) duc in numerum terminorum. Producti semissis est summa.

Patet ex Theor. IV.

Aliter. Si summa extremorum par est, ejus semissis ducta in numerum terminorum dabit summam totam.

Aliter. Si numerus terminorum par est, summa extremorum ducta in semissem numeri terminorum dabit summam totam.

Utrumque patet ex IV. Theor. *Cum aut summa extremorum, aut numerus terminorum impar est, proveniet quidem summa, sed ut fractiones declinentur, præstat tum uti modo primo.*

Aliter. Cum numerus terminorum impar est; medius in numerum terminorum ductus summam totam exhibebit.

Patet ex Theor. V.

Hi tres modi sunt universales, & primus insuper a fractionibus liber est. Alii tres particulares habentur ex Theorem. VII., VIII., IX.

PROBLEMA IV.

Maximo termino, excessu, & numero terminorum datis, invenire minimum.

Ducatur excessus in numerum terminorum unitate mulctatum, & productum aufer a maximo. Relinquetur minimus.

Patet ex Theor. I., & Coroll.

Etiam independenter, vel ab excessu, vel a numero terminorum reperietur minimus, si maximus per numerum terminorum unitate mulctatum, vel per excessum dividatur: residuus enim erit minimus, ut patet ex eodem Theoremate.

PROBLEMA V.

Datis maximo, ac minimo terminis, & numero terminorum, invenire excessum.

Minimum aufer a maximo. Residuum divide per numerum terminorum unitate mulctatum. Quotiens erit excessus.

Patet ex Theor. I. ac Coroll.

Etiam independenter a minimo reperietur excessus, si maximus dividatur, quantum potest, per numerum terminorum unitate mulctatum. Quotiens enim erit ipse excessus, ut patet ex eodem Theor. Residuum verò divisionis erit minimus.

PRO-

PROBLEMA VI.

Minimo, maximo, & excessu datis, invenire numerum terminorum.

A maximo aufer minimum, & residuum divide per excessum. Quotiens unitate auctus erit numerus terminorum.

Patet ex I. Theor., & Coroll.

Etiam independenter a minimo reperietur terminorum numerus, si maximus per excessum dividatur quantum potest. Quotiens enim, unitate auctus rursus erit numerus terminorum, ut patet ex eodem Theor. Residuum verò ex divisione erit minimus.

PROBLEMA VII.

Numero terminorum, excessu, & progressionis summâ datis, invenire minimum, & maximum.

a b
3 7 11 15 19 23
exc. 4. sum. 78. num. term. 6.
c d e
quoti. (13. f
20. *k*
26. n

Summa progressionis *d*, dividatur per *e* numerum terminorum. Quotiens *f* erit semissis summæ extremorum *a*, *b*, per Theor. IV. Duplicetur *f*, & fiat *n*; erit *n* summa extremorum.

Deinde numerus terminorum *c* unitate mulctatus, ductus in excessum *c*, fit *k*. Erit *k* extremus, dempto minimo, ut patet ex Coroll. Theor. I.

Si auferatur igitur *k* ab *n*, residuum erit duplum minimi. Semissis ergo residui erit minimus, eoque adjecto ad *k*, qui erat maximus, dempto minimo, proveniet maximus.

Si non k auferas a duplo f, *sed semissem ipsius k à simplo* f, *residuum erit minimus quæsitus*.

PROBLEMA VIII.

D*Ato minimo* a, *excessu* c, *& summâ progressionis* b; *invenire numerum terminorum, & maximum terminum*.

Quia duplum minimi *a* potest esse majus, vel minus excessu *c*, hinc gemina Problematis solutio est.

a					
3	7	11	15	19	23
		c			b.
		exc.			sum.
		4			78.

Esto primum duplum minimi *a* majus excessu *c*. Residuum, hoc est differentiam, divide per excessum *c*. Quadratum ex semisse quotientis adde duplo summæ progressionis *b* diviso per excessum *c*. Ex hac novâ summâ extrahe radicem quadratam: a qua aufer semissem quotientis. Quod restabit, erit numerus terminorum quæsitus.

Esto deinde duplum minimi *a* minus excessu *c*. Duplum minimi aufer ab excessu *c*. Residuum, hoc est differentiam, divide per excessum *c*. Quadratum ex semisse quotientis adde duplo summæ Progressionis *b*. Ex hac novâ summâ elice radicem quadratam: cui si addatur semissis quotientis, proveniet numerus quæsitus terminorum.

a					
2	7	12	17	22	27
		c			b
		exc.			sum.
		5			87.

Invento numero terminorum, habetur maximus, per Probl. II.

$$yy \text{ Æ } \frac{2b.}{c} \quad \frac{2a+c}{c}y$$

PROBLEMA IX.

Data sit progressio Arithmetica a, b, c *&c., cujus excessus k, & numerus quicumque* n: *progressionem per tot terminos continuare, ut ejus summa par sit numero dato* n, *in multitudinem terminorum ducto.*

Quoniam duplum minimi *a* potest esse majus, vel minus excessu *k*, duplex habetur solutio Problematis.

min.	a	3.
excef.	k	2.
mult.	y	8.
num. datus	n	10.

Si duplum minimi majus est excessu *k*; ex duplo dati *n* aufer differentiam inter duplum mi-

minimi *a*, & excessum. Residuum divide per excessum *k*. Quotiens est multitudo terminorum quæsita.

Si minimi *a* duplum est minus excessu *k*; duplo dati *n* adde differentiam inter duplum minimi *a*, & excessum *k*: summam divide per excessum *k*. Quotiens est multitudo terminorum quæsita.

Determinatio patet ex constr.

$$y\,Æ\,\frac{2n - 2a + k}{k}$$

PROBLEMA X.

D*Atur* a *minimus terminus progressionis Arithmeticæ, & multitudo terminorum* b, *quæ ducta in alium datum numerum* m *æquatur summæ progressionis. Quæritur ipsa progressio.*

A duplo numeri dati *m* aufer duplum minimi termini *a*. Reliquum divide per multitudinem terminorum, unitate mulctatam. Quotiens erit excessus secundi termini supra primum: quo invento, habentur singuli termini progressionis, per Prob. I.

mini.	a
mult.	b
num. datus	m
exces.	x

$$y \text{ Æ } \frac{2m - 2a}{b - 1}$$

Cum tria hæc postrema Problemata solverim per Algebram, & per eamdem facillimè demonstrentur, non putavi operæ pretium esse iis viâ syntheticâ, hoc est ordinariâ, demonstrandis hic immorari.

CAPUT III.

Quæstiones circa Progressiones Arithmeticas.

RElinquum est, ut ex allatis jam Problematis nonnulla ad materiam certam traducamus, per quæstiones aliquot sequentes.

Quæstio I.

COnscripti sunt Milites per dies 30. Primo die adscripti sunt 300. Diebus sequentibus affluxere semper totidem, quot die præcedenti, & adhuc 10 amplius. Quot ergo universim sunt conscripti?

Solvendo problema III. reperies conscriptos esse 133500. *Similis erit quæstio sequens.*

Quidam cum Operario, illius stimulaturus industriam, ita convenit: primo die lucraberis 30 asses; secundo totidem, & si satisfeceris, adhuc tres superaddam; atque ita quolibet die tantum lucraberis, quantum præcedenti, & asses insuper tres. Hac lege 20 dies operi sunt impensi. Quæritur summa stipendii. Sol-

Solvendum est denuo Problema III. Ex quo reperies asses 1170, id est florenos 58.

Quæstio II.

ARtifex ex pacto die primo lucratus est 40 asses, postremo 90; quolibet autem die tantum, quantum præcedenti, cum auctario semper 5 assium. Quot ergo dies operi impendit? & quantum lucratus est?

Solve Problema VI. Reperies dies 11. Tum solve problema III., & summa lucri proveniet assium 715.

Quæstio III.

EX pacto lucratus est Artifex die primo tres solidos.. Deinceps autem tantum die quolibet, quantum præcedenti, cum auctario semper solidorum 4. Lucri summa fuit 78 solidorum. Quæruntur dies operi impensi.

Solvendo problema VIII., reperies dies 6.

Quæstio IV.

DUo æqualem summam nummorum expenderunt in pauperes: unus quotidiè distribuit nummos 10, alter verò die primo tres nummos; deinceps autem tantum die quolibet, quantum præcedenti duobus semper adjectis. Quæritur numerus dierum, huic distributioni impensus, & ipsa summa.

Solvendo problema IX., reperies 8 dies, quibus singuli expenderunt 80 nummos.

Quæ-

Quæstio V.

DUo expenderunt in pauperes ſpatio dierum 4 æqualem ſummam nummorum. Unus quotidiè diſtribuit nummos 7: alter primo die unum; deinceps autem tantum die quolibet, quantum præcedenti, adjecto tamen ſemper adhuc aliquo nummorum numero ſuper eodem. Quantum ergo dedit quotidie? & quanta eſt ſumma tota?

Solve problema XVIII. reperies eum, qui primo die expendit nummum unum, ſecundo die expendiſſe 5, tertio 9, quarto 13, & ſummam totam 28.

De Progreſſione Geometricâ, tum finitâ, tum infinitâ.

PRogreſſio Geometrica eſt ſeries numerorum, ſeſe mutuò eâdem proportione excedentium, ſive eſt quælibet proportio per plures terminos, quàm duos continuata. Si proportio continuatur per terminos creſcentes, dicetur progreſſio aſcendens; deſcendens verò, ſi per decreſcentes. Porro cum progreſſio quælibet Geometrica, vel finita eſſe poſſit, vel infinita, ſeu indefinita, hoc eſt, continuari per terminos multitudine finitos, vel infinitos; de hac librum prorſus inſignem ſcripſit Gregorius a S. Vincentio; de illâ ſolâ Arithmetici meminere. Quod ſanè miror, quando (ut oſtendi ad Prop. XXXV. L. IX., & ex dicendis hoc Capite planum fiet) facillimus fit a finitâ ad infinitam tranſitus.

De

De utrâque igitur acturus hic sum, ostendamque, quod ab aliis hactenus animadversum non reperio, progressionis infinitæ mysterium omne in progressione finitâ, Arithmeticis jam pridem notâ, latere. Quod priusquam aggrediar, necessaria quædam præmitto.

I. Denominator X proportionis, numericæ scilicet, seu rationalis *a* ad *b*, est numerus ita se habens ad unitatem, ut major terminus *a* ad minorem *b*. Reperitur, si major *a* dividatur per minorem *b*. Quotiens enim X est denominator quæsitus. Nam quotiens omnis ita est ad unitatem, ut divisus *a* ad divisorem *b*. Quando quotienti adhæret fractio, ea ad minimos terminos est revocanda: imò, ut usui denominator sit, integer ad fractionem sibi adhærentem revocandus est, ut vides in Z.

a. 35
b. 15

$2\frac{1}{3}$ X

$\frac{7}{3}$ Z Un.

II. Si denominator est numerus integer, quod tum accidit, cùm minor numerus majorem metitur; unitas, & denominator sunt minimi termini, ad quos proportio data reduci potest.

III. Si denominator est integer *c* cum fracto, quod tum eveniet, cùm minor proportionis terminus *a* majorem *b* non metitur, tunc minimi termini quibus data proportio *a* ad *b* exprimi potest, sunt duo numeri; ac proinde minimos proportionis terminos non ingreditur unitas.

a 35
b 15

1 d 7 f
c 2———
3 e 3 e
Uni
o m
2 c———
n n

ſtrati

dhære
d min
: ſit *d*
le *d*,
, *e* p
C. IV
d, *e*.
tio *f*
or *c*,
id *b*.
x : r
Expr
n. Q
ſt ut
dem
er *e*,
o, *n*
C. II.
n n
r eſt
o *d*,
Mi
orin
I

CAP. IV.

Progressionis Geometricæ finitæ, & infinitæ affectiones.

THEOREMA I.

Proportio quælibet a *ad* b *continuatur ascendendo, si denominator* z *multiplicet terminum majorem* b; *descendendo, si denominator* z *dividat terminum minorem* a.

Demonstratio.

Z multiplicans *b* gignat *m*. Ut 1 est ad denominatorem z, ita *a* est ad *b*. Atqui ex definitione multiplicationis, etiam ut 1 est ad z,

$$\text{Uni.}\frac{3}{2}\text{Z.}$$

h	g	f	a	b	m	n	o
$\frac{32}{9}$	$\frac{16}{3}$	8.	12.	18.	27.	$\frac{81}{2}$	$\frac{243}{4}$.

ita multiplicatus *b* ad productum *m*. Ergo, ut *a* est ad *b*, ita *b* est ad *m*. Quod erat primum. Deinde z dividens *a* gignat quotientem *f*. Per definitionem divisionis divisus *a* est ad divisorem z, ut quotiens *f* est ad 1. Ergo permut. divisus *a* est ad *f*, ut divisor z ad 1. Atqui etiam est, ut z ad 1, ita *b* ad *a*; cum z sit denominator rationis *b* ad *a*. Ergo *b* est ad *a*, ut *a* ad *f*. Quod erat alterum.

THEO-

THEOREMA II.

Omnis proportio, tam ascendendo, quàm descendendo, continuari potest per terminos infinitos.

Demonstratio.

Data sit ratio quævis *a* ad *b*, cujus denominator z. Potest major terminus multiplicari per denominatorem, & productum *m* rursus per z, & sic in infinitum. Atqui, per Theor. I, sic ratio data continuatur ascendendo. Ergo &c. Pari ratione potest minor terminus *a* dividi per denominatorem z, & quotiens *f* rursum dividi per z, atque ita in infinitum. Sed per Theor. I. ita continuatur ratio data descendendo. Ergo &c. *Termini tamen non erunt semper integri numeri, ut patebit ex Theor. IV.*

THEOREMA III.

Omnis proportio multiplex, ascendendo continuari potest per infinitos numeros integros; descendendo tamen non semper usque ad unitatem.

h	g	f	a	b	m	n	o.	
1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	Den. 2.

Demonstratio I. Partis.

CUjuscunque rationis multiplicis minor terminus *a* metitur majorem *b*, ac proinde ejus denominator est numerus integer, qui multiplicans *b* producit tertium terminum integrum *m*, & multiplicans *m*, producit quartum integrum *n*. Et sic in infinitum.

m. l. *k*. a. b. p. q.

$\frac{3}{2}$ — 3 6 12 24 48 96 Den. 2.

Demonstratio II. Partis.

EX præc. patet, ut descendendo continuetur ratio data *a* ad *b*, debere minorem terminum *a* dividi per denominatorem, qui cum non semper metiatur terminos, quos divisurus est, provenient quandoque quotiens non integri numeri. Ut in serie hic appositâ denominator 2 dividens *a* gignit quotientem *k*; & dividens *k* quotientem *l*; dividens verò *l*, quem non metitur, gignit quotientem *m*.

Corollarium.

CUm omnis progressio ab unitate incipiens terminis constet multiplicem proportionem habentibus; patet ex theoremate, eam posse per integros numeros infinitos continuari.

THEO-

THEOREMA IV.

NUlla proportio, quæ multiplex non ſit, per numeros integros continuari poteſt, ſeu aſcendendo in infinitum, ſeu deſcendendo uſque ad unitatem.

Demonſtratio.

PRoportionis *a* ad *b*, quæ multiplex non eſt, hoc eſt cujus minor terminus non metitur majorem, denominator non eſt numerus integer. Ergo, ut in præmiſſis num. III. demonſtravi, minimos terminos, quibus exprimi ea poteſt, non ingreditur unitas: ſed ii ſunt duo numeri, proinde per XXIV. VII. inter ſe primi ſunt. Quare, per XVI. IX., nequit illis reperiri tertius proportionalis; ac proinde neque aſcendendo, neque deſcendendo data proportio in his terminis continuari poteſt. Jam verò, per Pro. II. L. VIII. exhiberi poteſt progreſſio proportionis datæ conſtans tribus terminis integris; item alia progreſſio terminorum 4; item alia terminorum 5; atque ita infinitæ progreſſiones diverſæ per II. VIII. reperiuntur, omnes terminis diverſis conſtantes, quarum unaquæque unum terminum habet ampliùs, quàm prior. Verùm, quia in ſingulis hiſce progreſſionibus datæ proportionis, extremi termini in Pro. II. L. VIII. jam citatâ demonſtrantur eſſe primi inter ſe, earum nulla continuari ulteriùs poteſt, ut patet ex XVII. L. IX. Nulla igitur proportio, quæ multiplex non ſit, &c. *Q. E. D.*

l k h g f a b m n o p

$$\frac{16}{3}\text{ — } 8\ 12\ 18\ 27 \text{ — }\frac{81}{2} \qquad \text{Den.}\ \frac{2}{3}\text{ — } Z$$

Si quæras, quousque finè fractis continuari possit, respondeo, id ex ipso opere continuationis innotescere. Ut sursum continues rationem *a* ad *b*, ducendus est denominator z in terminum majorem *b*, per Theor. I. Quia verò denominator z integer numerus non est, qui producetur, necessariò fractus erit: qui si ad integrum reduci potest per ea, quæ traduntur Prob. IV. C. III. L. II. continuabitur per illum adhuc integrum ratio data *a* ad *b*; si non possit, quod continget, si denominator numeratorem non metiatur, non poterit per integros numeros ratio *a* ad *b* ulteriùs continuari.

THEOREMA V.

PRogressio Geometrica, cujus extremi numeri sunt primi inter se nec sursum, nec deorsum ulteriùs potest per numeros integros continuari.

Demonstratur Prop. XVII. Lib. IX.

THEOREMA VI.

IN omni progressione geometricá incipiente ab unitate secundus terminus, (unitas inter terminos non computatur,) quartus, sextus, & reliqui omnes locorum parium sunt quadrati.

Ter-

0	1	2	3	4	5	6	7	8
.	a	b	c	d	e	f	g	h
1	2	4	8	16	32	64	128	256

Tertius, ſextus, nonus, & reliqui, duobus intermiſſis, omnes, quorum videlicet exponentes metitur ternarius, ſunt cubi.

Sextus, duodecimus, decimusoctavus, & reliqui omnes, quorum exponentes metitur ſenarius, ſunt quadrati ſimul & cubi.

Quintus, ſeptimus, undecimus, decimuſtertius, & reliqui omnes, quorum exponentes ſunt primi uumeri, neque quadrati ſunt, neque cubi.

Demonſtrantur hæc omnia in Prop. VIII. Lib. IX. ejuſque ſcholio. *Exponentes ſunt numeri ſeriei naturalis ab unitate, indicantes loca terminorum progreſſionis.*

THEOREMA VII.

IN progreſſione geometricâ trium terminorum bb *quadratus medii (hoc eſt medius in ſe ipſum ductus) producto* ac *extremorum æqualis eſt.*

a	b	c
2	4	8

bb	ac
16	16

Demonſtratur Prop. XX. Lib. VII.

THEOREMA VIII.

IN progressione Geom. quatuor terminorum, productum ad *extremorum æquatur producto* bc *mediorum. Idem verum est in quibuscumque quatuor proportionalibus, licèt non continuè: ut si* f *sit ad* g, *ut k ad* m; f m *productum ab extremis æquatur* g *k producto a mediis.*

a	b	c	d
2	4	8	16

ad	bc
32	32

f	g	k	m
2	6	4	12

fm	gk
24	24

Demonstratur Prop. XIX. Lib. IX.

THEOREMA IX.

IN omni geometricâ progressione, a f *productum extremorum, & producta* be, cd, *terminorum æqualiter ab extremis distantium inter se æqualia sunt.*

Demonstratio.

QUoniam omnes *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, sive *a*, *b*, *c*, *x*, *d*, *e*, *f* sunt continuè proportionales; manifestum est, *a* esse ad *b*, *ut e* ad *f*. Ergo per XIX. VII. *af* pro-

a	b	c	d	e	f
3	6	12	24	48	96

Producta af, be, cd Æ 288

a	b	c	x	d	e	f
3	6	12	24	48	96	192

productum ex primo *a* in quartum *f* æquatur producto *be* ex mediis *b*, & *e*. Pari ratione erit *b* ad *c*, ut *d* ad *e*. Ergo rursum per XIX. VII. *be* genitus ex *b* in *e* æquatur *cd* genito ex *c* in *d*. *Q. E. D.*

Producta	af	Æ576
	be	
	cd	
	xx	

THEOREMA X.

QUivis terminus progreſſionis geometricæ in ſe ductus æquatur producto quorumlibet, æqualiter ab ipſo diſtantium.

Demonſtratio.

SUmatur quicumque *x*, ſive is ſit præcisè omnium medius, ſive non. Quoniam ex hyp. *c*, *x*, *d* ſunt proportionales; erit per Theor. IV., ſive per XX. VII. *xx*, quadratus aſſumpti *x*, æqualis *cd* producto extremorum *c*, & *d*. Atqui per præced. productus ex *b* in *e* æquatur producto ex *c* in *d*. Ergo etiam productus ex *b* in *e* æquatur quadrato aſſumpti *x*. Liquet ergo propoſitum.

Nota pro ſequentibus Theorematis, loca terminorum progreſſionis numerari ab unitate excluſivè, vel, ſi progreſſionis principium non ſit unitas, excluſivè a termino minimo progreſſionis: id enim, ut deinde apparebit, commodius eſt ad praxim. Porro numeri 0. 1. 2. 3. 4. *&c. ſupra progreſſionis terminos adſcripti, quos indices, ſeu exponentes dicimus, indicant quotuſquiſque ſit ab unitate, ſeu termino minimo;*

sive quot locis quisque ab unitate, vel minimo termino distet. Supra unitatem scribitur 0, *supra* a *primum ab unitate ponitur* 1, *supra sequentem* b 2, *& sic deinceps ordine naturali.*

THEOREMA XI.

In progressione geometrica cujus

1	2	4	8	16	32	64	128	256
0	1	2	3	4	5	6	7	8
	a	b	c	d	e	f	g	h

principium unitas est, si quivis terminus c *per se ipsum multiplicetur, producetur alius ejusdem progressionis terminus* f, *locis duplo pluribus ab unitate distans.*

Demonstratio.

Ex Prop: XI. Lib. IX. Coroll. III. Et facilè etiam ostenditur, si termini progressionis multiplicatione speciosâ exprimantur.

0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	a	aa	aaa	aaaa	aaaaa	aaaaaa	a7	a8
1	2	4	8	16	32	64	128	256

Ex Lemmate Prop. VIII. Lib. IX., & quia multiplicationis productum solâ litterarum appositione exprimitur patet, ex *a* primo in se fieri *aa* secundum, & ex *a* in *aa* fieri tertium *aaa*, & ex *a* in *aaa* fieri quartum *aaaa*, & sic deinceps. Ex quo manifestum est, singulos terminos tot locis distare ab unitate, quot litteris scribuntur; & contra tot scribi litteris, quot distant ab unit. locis. Atqui si terminus quivis, puta

puta tertius *aaa*, in se ducatur, productus *aaaaaa* duplo pluribus litteris scribitur, quàm ipse. Ergo etiam duplo pluribus ab unitate distabit locis. *Q. E. D.*

THEOREMA XII.

IN progressione geometricâ, cujus principium unitas est, si termini duo quilibet b, *&* e *invicem multiplicentur; eorum ab unitate distantiæ simul sumptæ conficiunt producti* g *ab unitate distantiam.* Vide 1. Schema Theor. prec.

Demonstratio similis præcedenti. Exprimatur series speciosè. Et multiplicent sese mutuò secundus *aa*, & quintus *aaaaa*. Eorum litteræ simul junctæ dant productum 17, ac proinde (ut ostendi in præced.) etiam eorum junctæ distantiæ exhibent distantiam producti ab unitate. *Q. E. D.* V. Schema prec.

THEOREMA XIII.

IN progressione Geometricâ, cujus principium unitas non est,

0	1	2	3	4	5	6
a	b	c	d	e	f	g
3	6	12	24	48	96	192

si quivis terminus c *se ipsum multiplicet, & productus per minimum* a *dividatur; quotiens distabit ab minimo* a *locis duplo pluribus, quàm terminus se ipsum multiplicans* c.

Denom. q. 2

0	1	2	3	4	5	6.
a	aq	aqq	aqqq.	aqqqq.	aqqqqq.	aqqqqqq.
3	6	12	24	48	96	192.

Demon-

Demonstratio expeditur facillimè, si termini progressionis multiplicatione speciosâ exprimantur. Per Theor. I. minimo termino *a* ducto in denominatorem *q* fit *aq* primus ab minimo; & primo *aq* ducto in denominatorem *q*, fit secundus *aqq*; & ex hoc in *q*, fit tertius *aqqq*; & sic deinceps procreantur termini reliqui progressionis omnes. Ex quo patet, quemlibet terminum tot locis distare ab minimo *a*, quot in ipso reperiuntur litteræ *q*, denominatorem exprimentes. Terminus jam quispiam, puta secundus *aqq*, ducatur in se, hoc est in *aqq*; productus *aaqqqq* continebit litteras illius bis, nimirum duo *a*, & duplo plura *q*, quàm producens *aqq*. Ergo si productus *aaqqqq* dividatur per minimum *a*, quotiens *aqqqq* scribetur uno *a*, & duplo pluribus *q*, quàm *aqq*, qui seipsum multiplicaverat. Quare cum jam ostenderim, terminum quemlibet tot distare locis ab minimo *a*, quot in ipso reperiuntur *q*, liquet quotientem *aqqqq* locis duplo pluribus distare ab minimo *a*, quàm *aqq* terminus seipsum multiplicans. *Q. E. D.*

THEOREMA XIV.

Schema præc.

In progressione geometricâ, cujus principium unitas non est, duo quivis termini c, *&* e *sese invicem multiplicent, & productus per minimum* a *dividatur, quotientis distantia a minimo* a *æqualis erit se mutuò multiplicantium distantiis a minimo, simul junctis.*

Demonstratio est similis præcedenti, ut tantùm opus sit exemplum adferre. Exprimatur series speciosè, ex qua se mutuò multiplicent

cent primus aq, & quartus $aqqqq$. Productum erit $aaqqqqq$, quo diviso per minimum a, quotiens est $aqqqqq$, qui est quintus in progressione terminus, cujus distantia ab minimo a, est 5, quem efficiunt ipsorum aq, & $aqqqq$ distantiæ 1, & 4.

THEOREMA XV.

SI a maximo termino finitæ progressionis duplæ auferatur minimus, reliquus æquatur summæ progressionis dempto maximo.

Minimus a, 3, auferatur ex maximo g, 192. Reliquus 189 æquatur omnibus a, b, c, d, e, f, hoc est toti summæ, dempto maximo g.

a	b	c	d	e	f	g
3	6	12	24	48	96	192

Demonstratum est in Coroll. IV. Prop. XXXV. Lib. IX.

THEOREMA XVI.

IN omni finitâ progressione geometricâ, ut denominator unitate mulctatus est ad unitatem, ita maximi, & minimi termini differentia (sive maximus dempto minimo) est ad totam progressionis summam dempto maximo.

Demonstratum est in Coroll. I. Prop. XXXIV. Lib. IX.

Corol-

Corollarium.

Itaque exceſſus maximi termini ſupra minimum in progreſſione duplâ æqualis eſt ſummæ reliquorum; (hoc eſt omnibus dempto maximo) in progreſſione triplâ duplus; in progreſſione quadruplâ triplus; & ſic deinceps.

Demonſtratio patet ex hoc Theoremate.

THEOREMA XVII.

Schema Theor. 15 *In omni progreſſione geometricâ finitâ, ut duorum maximorum* f, g *terminorum differentia eſt ad maximum* g, *ita maximus* g *dempto minimo* a *eſt ad totam progreſſionis ſummam dempto minimo.*

Demonſtr. eſt Coroll. V. Prop. XXXV. Lib. IX.

THEOREMA XVIII.

Si progreſſio quæcumque geometrica deſcendendo continuetur in infinitum; ut denominator unitate mulctatus eſt ad unitatem, ita primus, ſeu maximus terminus eſt ad reliquam infinitorum terminorum ſummam.

Dentur exempli gratia duo termini proportionis triplæ 54, & 18, & progreſſio inſtituatur *a*, *b*, *c*, *d* &c., continue-

a	b	c	d	e	f	g	h	*k*
54	18	6	2	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{2}{81}$	$\frac{2}{243}$

M 27

tinueturque per Theorema II. descendendo, (hoc est per terminos proportionaliter decrescentes in infinitum. Ut denominator 3 unitate mulctatus, nempe 2, est ad unitatem, ita primus terminus 54 est ad summam reliquorum infinitorum *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, &c.

Demonstratio.

PEr Theor. XVI. in progressione finitâ, ut denominator unitate mulctatus est ad unitatem; sic primus, seu maximus terminus, dempto minimo, est ad summam reliquorum. Quare cum in progressione per decrescentes in datâ proportione terminos in infinitum continuatâ, minimus terminus evanescat) ut ostensum est in Elementis nostris Geom. in Schol. Prop. XI. Lib. VI. Lem. II.) erit, ut denominator unitate mulctatus ad unitatem, ita primus terminus ad reliquorum infinitorum summam. *Q. E. D.*

Vides, opinor, qui hæc legis, quàm facilis sit, quod supra me ostensurum promiseram, a progressione finitâ ad infinitam transitus. Unde mirum est, priores Arithmeticos, qui progressiones finitas tenerent, infinitas ignorasse, cum hæ ab illis immediate dependeant. Theorema siquidem XVI. ex quo demonstratio hujus facillimè deducta est, Corollarium est Prop. XXXV. Lib. IX.

Idipsum apparebit ex Corollario sequenti, ex Theorematis XIX. XX. & Coroll. Theor. XIX. ex Problematis VII. VIII. IX. X. XI.

Corol-

Corollarium.

PRimus terminus reliquorum infinitorum summæ in progressione duplâ æqualis est; in progressione triplâ duplus; in progressione quadruplâ triplus; in quintuplâ quadruplus; & sic deinceps.

Patet ex Theoremate.

THEOREMA XIX.

SI progressio geometrica deorsum continuetur in infinitum, ut duorum primorum, hoc est maximorum terminorum differentia est ad secundum terminum, ita primus terminus est ad reliquam infinitorum terminorum summam.

Demonstratio.

PEr prop. XXXV. l. IX. in progressione finitâ ut primorum seu maximorum terminorum differentia est ad secundum, ita primus, dempto minimo est ad summam reliquorum. Quare cum in progressione descendendo in infinitum continuatâ minimus terminus evanescat, erit ut primorum differentia ad secundum, ita primus ad reliquorum infinitorum summam. *Q. E. D.*

Theorema convenit tam magnitudinibus, quàm numeris, quemadmodum & Prop. XXXV IX. a qua dependet. Cæterùm hìc rursus apparet, quàm expeditè a finitis progressionibus ad infinitas transeatur.

THEO-

THEOREMA XX.

Isdem positis, si primorum duorum terminorum differentia ax, *primus terminus* ab, *&* az *sint continuè proportionales; erit* az *tota terminorum infinitorum summa.*

a—x——b——c—d—e——z

Demonstratio.

QUoniam *ax* est ad *ab*, ut *ab* est ad *az*, erit invertendo *ba* ad *xa*, ut *za* ad *ba*. Ergo dividendo *bx* ad *xa*, ut *zb* ad *ba*. Igitur invertendo *ax* (differentia primorum *ab*, & *bc*) est ad *bx*, seu *ac* secundum, ut *ab* primus est ad *bz*. Ergo per Theor. XVIII. *bz* est summa omnium, dempto primo *ab*. Ergo *az* est summa tota. *Q. E. D.*

Corollarium.

QUando igitur progressionis duo maximi termini *k*, *l* solùm unitate differunt, quadratus primi termini æquatur reliquorum infinitorum summæ.

k	l.	m
9.	8.	$\frac{64}{9}$ &c.

Demonstratio patet ex hoc Theor. & ex XVIII. l. IX. Tunc enim duorum primorum differentia est l, quæ dividens quadratum maximi termini, per XVIII. IX. exhibet tertium proportionalem, ipsum videlicet quadratum, quem dividendo non mutat.

THEO-

THEOREMA XXI.

PRogressionis geometricæ admiranda incrementa.

Multa hanc in rem afferri solent. Unum ego afferam, sed illustre, & quàm brevissimè ostendam: videlicet progressionis decuplæ, incipientis ab unitate, trigesimum septimum terminum plures continere unitates, quam arenas contineat orbis terræ: & si primus terminus statuatur arenula, trigesimum septimum ab illo futurum toto terrarum orbe majorem.

Ratiocinatio formabitur hunc in modum.

Scribit Archimedes in arenario, se comperisse, 35 grana papaveris longitudinem digiti Geometrici excedere. Sed ponamus ea esse minora, & grana 40 efficere digitum.

Quoniam igitur milliare continet 80, 000 digitorum; continet enim 5000 pedum, quæ ducta in 16 digitos in uno contentos efficiunt 80, 000: si hæc ducantur in 40 grana unum pedem æquantia, fiunt 32 00, 000, numerus granorum conficiens milliare unum.

Jam ex Astronomis nemo diametro Terræ tribuit milliaria 10, 000. Sed demus, eam esse tantam. Igitur si 10, 000 ducantur in grana unius milliaris, nempe in 3, 200, 000, provenient grana 32, 000, 000, 000, quæ continet Terræ diameter. Verùm pro duabus notis 32 substituamus has 100, ut fiat numerus rotundus A, granorum Terræ diametrum componentium, qui prioris plus quàm triplus est, adeoque & Terræ diameter ex hoc capite rursum

rursum augebitur plusquàm triplo, fietque major 30, 000 milliariorum. Erit igitur ut 1 ad numerum A, ita grani diameter ad diametrum Terræ. Per Lem. 2 in schol post XI. Lib. VI.

1. Gran.
A. 100,000 (000000
B. 10,000 (000000 (000000 (000000
C. 1,000 (000000 (000000 (000000 (000000 (000000 cyf. 33.

Continuetur ratio 1 ad A per quatuor terminos 1, A, B, C. Erit per XVIII. Lib. XII. ut 1 ad C, ita grani sphærula ad sphæram Terræ, quæ proinde continet numerum granorum C. Is verò præter unitatem habet cifras 33. Cum enim primus A habeat cifras 11, secundus B habebit 22, & tertius C 33; ut patebit ex Probl. I. infra.

Ut jam cognoscantur arenæ orbis Terræ, inveniendæ tantùm erunt arenæ unius grani. Certum est, grani sphærulam non continere arenas 10,000. Si ergo C numerus granorum Terræ ducatur in 10, 000, proveniet D numerus arenarum, totum globum Terræ componentium; non illum quidem, qui de facto est, sed alium longè majorem illo, cum & grana assumpserim minora, quàm sint, & arenas uni grano dederim justo plures, & diametrum terræ posuerim multò plus, quàm triplo majorem verâ: ex quo postremo solo, cæteris neglectis, sphæra ex arenis D composita, per XVIII. Lib. XII. plus quàm vigesies septies orbe nostro toto major est.

D

10 (000000 (000000 (000000
(000000 (000000 (000000

Eſt porro numerus D, quia conſtat unitate, & cifris 37, terminus trigeſimus ſeptimus progreſſionis decuplæ 1, 10, 100 &c. ut patebit ex Prob. I.

Scio, minori numero quæſitum obtineri poſſe, ſi aliter calculus inſtituatur. Sed quia id parum intereſt ad finem hic intentum, hanc viam, cæteris breviorem, ſecutus ſum.

THEOREMA XXII.

Perinde admiranda ſunt progreſſionum geometricarum decrementa, atque incrementa,

Quemadmodum enim ab unitate per 37 terminos proportionis decuplæ aſcendendo pervenitur ad numerum, qui multo major ſit numero arenarum totam telluris molem componentium; ita viciſſim ab illo prope immenſo numero, per 37 terminos proportionis decuplæ deſcendendo, devenitur ad unitatem. Et quemadmodum ab arenulâ minimâ aſcendendo per proportionis decuplæ terminos 37 ventum fuit ad magnitudinem toto terrarum orbe majorem; ita viciſſim ab ingenti illâ mole orbis terrarum deſcendendo per decuplæ proportionis 37 terminos venietur ad arenulam.

C A P. V.

Progressionis geometricæ finitæ, ac infinitæ Problemata.

PROBLEMA I.

DAtam progressionem geometricam tam sursum, quàm deorsum continuare in infinitum.

Constructio habetur ex Theor. I., & II. Quædam solummodò hìc adnotanda sunt.

I. Progressionis, ab unitate incipientis, denominatorem esse terminum ab unitate primum. Patet ex definitione denominatoris.

II. Cum termini progressionis constant unitate, & cifris, solâ cifrarum primi post unitatem termini additione cæteros terminos procreari, ut in Theor. XXI. quia A primus habet cifras 11; secundus B habebit 22 cifras: tertius C cifras 33, & sic deinceps. Patet ex Theor. I. & ex ipso multiplicationis opere.

III. Terminum quemlibet progressionis decuplæ 1, 10, 100 &c. tot locis distare ab 1, quot cifras habet. Patet ex II. hìc.

PROBLEMA II.

PRogressionis geometricæ, ab unitate incipientis, terminum quemcumque, licet cogniti non sint omnes medii, exhibere.

Res tota pendet ex XI, & XII. Theor. Da-

ta sit exempli gr. progressio dupla ab 1, cujus oporteat terminum quadragesimum tertium invenire.

Continuetur pro-	0	1	2	3	4	5
gressio per aliquot	1.	2.	4.	8.	16.	32.

terminos, quousque nimirum potest absque ullâ molestiâ, (hic facilè continuabis usque ad quintum,) & supra singulos scribantur exponentes. Duc quintum 32 in se: proveniet decimus 1024 per Theor. XI. Hoc rursum in se ducto, prodibit 1048576 vigesimus per idem Theor. Quo etiam ducto in se, fit quadragesimus 1(099,511(627,776, cujus exponens est 40: quæritur autem terminus exponentis 43. Differentia exponentium inventi 40, & quæsiti 43 est 3. Terminum igitur exponentis 3, nempe 8, duc in terminum jam inventum exponentis 40: producetur terminus exponentis 43 quæsitus, ut patet ex Theor. XII., nimirum 3 (796, 093 (022, 208.

Simili modo per XI, & XII. Theor. facile erit, quemvis terminum cujuscumque progressionis reperire.

PROBLEMA III.

Progressionis geometricæ, cujus principium non est unitas, quemcumque terminum, licet cogniti non sint omnes medii, invenire,

Praxis tota pendet ex Theor. XIII, & XIV. Data sit progressio a ad b, cujus oporteat terminum vigesimum nonum reperire.

Con-

Continuetur progressio per aliquot terminos, puta tres, & singulis suos exponentes suprascribe. Ducatur deinde tertius in se, & producto diviso per *a*, proveniet sextus. Hoc rursum in se ducto, & diviso per *a*, habetur duodecimus. Quo etiam in se ducto, ac diviso per *a*, prodibit vigesimus quartus, cujus distantia, seu exponens 24 deficit ab 29 exponente quæsiti, defectu 5. Assumo ergo duos exponentes, ut 3, & 2, qui juncti faciunt 5; & termino quidem exponentis 3 ducto in terminum jam inventum exponentis 24, & diviso producto per *a*, habetur vigesimusseptimus: quo rursum ducto in terminum exponentis 2, ac diviso per *a*, habetur vigesimusnonus, qui petebatur.

0	1	2	3
a	b	c	d
2.	6.	18.	54.

Demonstratio patet ex Theor. XIII., & XIV. Simili methodo, quilibet alii termini reperientur.

PROBLEMA IV.

PRogressionis duplæ finitæ summam exhibere.

A maximo termino *g* aufer minimum *a*. Residuus omnibus antecedentibus *f*, *e*, *d*, *c*, *b*, *a* æqualis est, per Theor. XV.

a	b	c	d	e	f	g
3	6	12	24	48	96	192

g 192
a 3
—————
189

PROBLEMA V.

Cujuscumque progressionis geometricæ finitæ summam exhibere.

Maximus terminus si non datur, inveniatur per Probl. II, vel III. A maximo aufer minimum. Residuum divide per denominatorem progressionis, unitate mulctatum: quotiens æqualis erit toti summæ, dempto maximo.

Demonstratio.

PEr Theor. XVI. ut denominator unitate mulctatus est ad 1, ita maximi, & minimi differentia est ad summam reliquorum. Ergo per XIX. Lib. IX. quartus proportionalis, reliquorum nempe summa invenitur, secundum (qui est unitas) ducendo in tertium (maximi nempe, ac minimi differentiam), & productum, hoc est differentiam ipsam (ea quippe ducta in 1 non immutatur) dividendo per primum, nempe per denominatorem unitate mulctatum.

Exem-

Exempla.

k m n o p q r
1. 3. 9. 27. 81. 243. 729.
3. den.
a b c d e f g
2. 3. $\frac{9}{2}$ $\frac{27}{4}$ $\frac{81}{8}$ $\frac{243}{16}$ $\frac{729}{32}$

q $\frac{1}{2}$ S $\frac{3}{2}$ denom. l. $\frac{665}{32}$ V $\frac{1330}{32}$

DEtur progressio tripla *k*, *m*, *n*, &c. Denominator unitate mulctatus est 2. A maximo *r* aufer minimum *k*. Residuum 728 divide per 2. Quotiens 364, æquatur omnibus antecedentibus *q*, *p*, *o*, *n*, *m*, *k*.

Detur deinde progressio sesqui-alteræ proportionis *a*, *b*, *c* &c. Aufer minimum *a* ex maximo *g*: residuum est *l*. Ex denominatore S aufer unitatem: restat *q*. Per *q* divide residuum *l*, maximi nempe, & minimi differentiam. Quotiens V æquatur omnibus maximum antecedentibus *f*, *e*, *d*, *c*, *b*, *a*.

PROBLEMA VI.

CUm progressio datur finita proportionis multiplicis, ejus summa adhuc aliter reperitur per Coroll. Theorematis.

Si datur progressio duplorum, excessui primi

mi termini supra minimum adde æqualem numerum.

Si datur progressio triplorum, eidem excessui adde dimidiam ejus partem.

Si datur progressio quadruplorum, excessui adde tertiam ejus partem.

Et sic deinceps: hac additione habebitur tota summa terminorum omnium dempto minimo, ut patet ex citato supra Corollario.

PROBLEMA VII.

Progressionis geometricæ cujuscumque per infinitos terminos descendentis summam exhibere.

Primus terminus dividatur per denominatorem progressionis unitate mulctatum: quotiens primo termino adjunctus exhibet totam summam terminorum infinitorum progressionis datæ.

Demonstratio.

PEr XVIII. Theor. ut denominator unitate mulctatus est ad unitatem, ita primus terminus est ad reliquam infinitorum terminorum summam. Cum hæc igitur illis tribus sit quarta proportionalis, exhibebitur ipsa per Prop. XIX. IX. si secunda quantitas ducatur in tertiam, unitas nempe in primum progressionis terminum, & productum, hoc est primus ipse terminus (is enim ductus in 1 non immutatur) dividatur per denominatorem unitate mulctatum, qui ex quatuor proportionalibus erat primus.

Exem-

Exemplum.

DAta sit progressio proportionis octuplæ, per infinitos terminos descendens. Primus *a* si dividatur per denominatorem unitate mulctatum, hoc est per 7, quotiens erit P. Igitur P æquatur toti summæ infinitorum, dempto primo *a*. Quare si P addatur ad *a*, fiet Q æqualis infinitis terminis, in proportione octuplâ decrescentibus *a*, *b*, *c*, *d*, &c.

a	b	c	d	e	f	g	
512	64	8	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{512}$	&c.

8. Denom.

P $73\frac{1}{7}$ Q $585\frac{1}{7}$

Aliud.

DAta sit progressio *k*, *m*, *n*, *o* &c. Hujus denominator unitate mulctatus est *p*. Per hanc diviso primo termino, *k*, 25, quotiens proveniet 100, quibus additis ad primum terminum, fit numerus 125 æqualis proportionalibus infinitis *k*, *m*, *n*, *o* &c.

k	m	n	o	
25	20	16	$\frac{64}{5}$	&c.

$\frac{5}{4}$ den. $\frac{1}{4}$ p

PRO-

PROBLEMA VIII.

PRogressionis geometricæ cujuscumque per infinitos proportionales terminos descendentis summam aliter exhibere.

Per excessum primi termini supra secundum divide quadratum primi termini: quotiens toti summæ infinitorum proportionalium æqualis est.

Demonstratio patet ex Theor. XX., & ex XVIII. Lib. IX.

Exemplum.

REpetatur progressio antecedens, *k*, *m*, *n*, *o* &c. Excessus primi termini supra secundum est 5. Quadratus primi 25 est 625: quo diviso per excessum 5, fit quotiens 125, æqualis proportionalibus infinitis *k*, *m*, *n*, *o* &c.

PROBLEMA IX.

PRogressionis multiplicis per infinitos terminos descendentis summam aliter invenire.

Si datur progressio dupla, ut 12, 6, 3 &c. primo termino adde æqualem.

Si tripla, ut 9, 3, 1, &c. primo termino adde partem ejus dimidiam.

Si quadrupla, ut 16, 4, 1 &c. primo termino adjice partem ejus tertiam.

Si quintupla, ut 25, 5, 1 &c. primo termino adde partem ejus quartam: atque ita deinceps.

ceps. Hac additione summa procreabitur æqualis toti progressioni proportionalium infinitorum.

Demonstratio patet ex Coroll. Theorematis XVIII.

PROBLEMA X.

PRogressionis super-particularis per infinitos terminos descendentis summam aliter invenire.

Cum proportio super-particularis sit, quando major terminus *a* minorem *b* continet semel, & unam ejus aliquotam, numerus aliquotam denominans sit *m*.

a	b	c	d	e
16	12	9	$\frac{27}{4}$	$\frac{81}{16}$

den. $1 \frac{1}{3}$ $\frac{n}{m}$ 64 Z

x48

Primus terminus per hunc *m* multiplicatus æquatur toti summæ infinitorum reliquorum *b*, *c*, *d*, *e*, &c.

Demonstratio.

DEnominator proportionis super-particularis est unitas cum fracto, cujus numerator est unitas, nominator verò ipse numerus *m* aliquotam denominans. Ergo denominator progressionis super-particularis unitate mulctatus est sola illa fractio *n*, *m* per quam diviso primo *a*, proveniet summa reliquorum infinitorum *b*, *c*, *d*, *e*, &c. ut patet ex Probl. VII. Atqui primus terminus *a* dividitur per fractum

n, *m*,

n, m, cum per eumdem inversum multiplicatur; multiplicatur verò per illum inversum primus a, si solus nominator m multiplicet primum a, cum numerator n sit unitas, quæ omnia patent ex Cap. VII. Lib. II. Ergo si m numerus aliquotam denominans multiplicet primum a, habetur summa reliquorum infinitorum b, c, d, e, &c. *Q. E. D.*

PROBLEMA XI.

Progressionis geometricæ, cujus primi duo termini differunt unitate per infinitos terminos descendentis, summam aliter exhibere.

Ducatur primus terminus in se ipsum, ut habeatur ejus quadratus. Is toti infinitorum proportionalium summæ æqualis est.

Demonstratio patet ex Coroll. Theor. XXX.

$9 \quad 8 \quad 7\frac{1}{9}$ &c.

Exemplum.

Data sit progressio proportionis 9 ad 8. Primi termini quadratus 81 infinitis hujus progressionis terminis æqualis est.

Præcedentia quinque Problemata, quæ artificio longè facillimo progressionis, per infinitos terminos descendentis exhibent summam, deducta sunt, vel ex Theoremate XVIII. ejusque Corollario, vel ex XX. illa verò nullo negotio ex progressione finitâ deduxi. Liquet igitur, quod initio spoponderam, progressionis infinitæ mysterium omne in finitâ latere.

Cæte-

Cæterum assertiones Theor. XVIII. XIX. XX. *Capitis præcedentis, & constructiones Problematum* VII. VIII. X. XI. *capitis hujus quædam sunt* P. Gregorii *in Lib.* II. *quadraturæ; quædam ex illo derivari possunt: quamvis ego, ut jam dixi, tam has, quâm illas, ex progressione finitâ, quæ similes planè, ac infinita, affectiones habet, novâ quadam ratione deduxerim, ac demonstraverim. Interim* P. Gregorio *sua laus manet, & ea quidem eximia prorsus, & singularis, qui progressionum naturam libro integro amplissimè, subtilissimèque prosecutus est, ut cæteris nonnisi spicas ex suá messe colligendas reliquerit.*

PROBLEMA XII.

Progressionis finitæ dato denominatore, summá, & maximo termino, invenire minimum.

Denominator unitate mulctatus ducatur in summam omnium, dempto maximo. Productum z aufer à maximo. Restabit minimus.

Demonstratio.

Denominator unitate mulctatus dividens maximum, dempto minimo, quotientem produxit summam omnium præter maximum, ut patet ex Probl. V. Ergo ex definitione divisionis si quotiens, nempe summa omnium præter maximum ducatur in denominatorem unitate mulctatum, producetur maximus, dempto minimo. Ergo si hoc productum auferatur ex maxi-

maximo, relinquetur minimus, qui quærebatur.

PROBLEMA XIII.

Progressionis finitæ datâ summâ, denominatore, & minimo termino invenire maximum.

Denominator unitate mulctatus ducatur in summam omnium, & producto addatur minimus. Hoc aggregatum divide per denominatorem. Quotiens erit maximus quæsitus.

Demonstratio hujus operationis patet ex Probl. V., & ex analysi, per quam inventa est.

PROBLEMA XIV.

Progressionis finitæ datis extremis, & omnium summâ invenire denominatorem, & singulos intermedios.

Maximi, ac minimi differentiam divide per summam omnium dempto maximo. Quoties unitate auctus est denominator, quo invento per Probl. I. habentur singuli termini.

Demonstratio.

Si maximi, ac minimi differentia dividatur per denominatorem unitate mulctatum, per Probl. V. provenit summa omnium, dempto maximo. Ergo per Coroll. II. Prop. XVI. Lib. VII., si eadem maximi, ac minimi differentia dividatur per summam omnium, dempto

pto maximo, proveniet denominator unitate mulctatus. *Q. E. D.*

PROBLEMA XV.

PRogressionis infinitæ descendentis dato denominatore, & omnium summâ invenire maximum terminum, & reliquos.

Denominator unitate mulctatus ducatur in summam omnium: productum dividatur per denominatorem: quotiens erit maximus terminus.

Demonstratio hujus operationis patet ex Probl. VII., & ex analysi, per quàm inventa est.

PROBLEMA XVI.

PRogressionis infinitæ descendentis dato maximo termino; & omnium summâ, invenire denominatorem, & reliquos terminos.

Primum terminum divide per summam omnium dempto maximo. Quotiens unitate auctus erit denominator, quo invento, per Probl. I. habentur singuli termini.

Demonstratio.

SI denominator unitate mulctatus dividat primum terminum, quotiens per Prob. VII. erit summa omnium, dempto maximo. Ergo si summa omnium, dempto maximo, dividat eumdem primum, quotiens erit denominator

unita-

unitate mulctatus, per II coroll. p. XVI. Lib. VII. Quotiens igitur unitate auctus erit denominator quæsitus. *Q. E. D.*

CAP. VI.

Quæstiones circa progressionem geometricam.

RElíquum est, ut ex problematis jam allatis ad materiam nonnulla applicemus.

Quæstio I.

Quanto tempore potuerit humanum genus propagari.

STatuamus, Adamum 20 annis genuisse 20 liberos, 10 mares, & 10 fœminas. His verò, & deinceps aliis, qui ab his descendent, ut singuli proles 20 gignant, paria scilicet 10 maris, ac fœminæ, demus annos 40; annis nempe 20, quibus apti ad generandum evadant, assignatis.

Adam igitur 20 annis genuit maris, ac fœminæ paria 10. Ab illis 40 annis sequentibus gignentur paria 100. Ab his verò proximis 40 annis producuntur paria 1000: atque ita deinceps per singulos quadragenos annos instituetur progressio proportionis decuplæ; cujus terminus nonus, qui est 100(000000 incidit in annum mundi 340. Quadragenâ igitur annum 340 complente nascentur 1000 milliones parium: & quadragenâ complente annum mundi 380, decies mille milliones parium: ea verò, quæ

quæ complet annum 420, parium 100 millia millionum: & sic deinceps. Tandem in quadragenâ complente annum 620 nascentur, paria hominum 10, 100 (000000 (000000, hoc est decies mille milliones millionum; is enim est progressionis decuplæ terminus decimus septimus incidens in annum mundi 620, per additionem contiunam 40 ad 20 primos Adami annos. Quid si his addamus omnes præcedentium quadragenarum homines plerosque adhuc superstites quanta multitudo ex solis 20 liberis Adami primo mundi vicenario procreatis exurget?

Atqui in hac hypothesi habita solum fuit ratio unius vicenarii annorum Adam. Quot igitur tales ex Adami ætate accipiemus annorum vicenarios, tot habebimus progressiones generationum similes, quarum quælibet annos mundi 20 plures continebit, quam progressio ipsam antecedens. Similiter ex ætatibus descendentium singulorum habita solum fuit ratio annorum a 20 usque ad 40, ac si per reliquam vitam liberos nullos producerent. Quæ omnia, si in calculum deducantur, hominum multitudo adhuc multo amplior evadet: vel certè abundè compensabunt ea, quæ in hypothesi superiori alicui videri possint liberaliùs assumpta.

Quæstio II.

Quantum frumenti ex uno grano haberi possit intra annos 8.

RESpondeo, granorum plus, quàm decies mille milliones millionum.

Nam

Nam granum unum plura ordinariè profert, quàm 100. Statuamus tamen proferre 100. Hæc sequenti anno producent centies centum grana, hoc est 10,000. Atque ita progressio proportionis centuplæ instituetur per annos 8. Anno igitur octavo granorum numerus proveniet 10,000(000000(000000, hoc est decies mille milliones millionum: is enim, ut patet ex Probl. I., est octavus terminus progressionis centuplæ. Quod si hæc progressio per paucos adhuc annos continuetur, ne omnia quidem totius mundi horrea capient frumenti copiam ultimo anno provenientem.

Hinc apparet, quàm facilè peregrini fructus, olera, flores &c. in aliquam Provinciam advecti, intra annos non multos multiplicentur.

Quæstio III.

STatuamus Beatissimæ Virgini Deiparæ hanc à Deo prærogativam esse datam, ut per singulos charitatis actus gratiam prius habitam duplicaret. Statuamus insuper, gratiam intra primum annum, quo ratione fuerit usa, acquisitam, ita excessisse gratiam primo acceptam, ut hic numerus 18(446,774(073,709(551,615 unitatem. Quæritur, per quot actus tantam gratiam obtinuerit?

Respondeo per 64. Progressionis enim duplæ per 64 terminos continuatæ summæ constituit dictum numerum.

Quæ-

Quæſtio IV.

SI mobile quodpiam ita moveretur per totam æternitatem, ut primo die conficiat milliaria 9, ſecundo die milliaria 8, tertio 7, & 1 nonam; & ſic deinceps diebus ſingulis percurrat ſpatia, in proportione ſemper eâdem 9 ad 8 decreſcentia. Quæritur, omnia illa ſpatia percurſa æternitate totâ, ſi in unam ſummam colligantur, quot milliaria conficient?

Invenienda eſt ſumma progreſſionis per infinitos terminos proportionis 9 ad 8 deſcendentis. Ea verò eſt 81. Conficeret igitur mobile iſtud motu, eâ ratione in æternum continuato, non niſi 81 milliaria; hoc eſt, conficeret plus omni eo, quod minus eſt milliaribus 81, accederetque ad hunc terminum intervallo quovis dato minore, licet numquam pertingeret.

Quæſtio V.

DUo *Viatores iter faciunt; primus quotidie abſolvit milliaria* ab 12, *ſecundus quotidie milliaria* cb 10, *ſed primum præceſſit milliaribus*, d 18. *Quæritur quo die, & poſt quot milliaria primus ſecundum aſſequetur:*

ab 12 a..c.........b
cb 10 d 18
....
f 9
....

Problema, hac quæſtione contentum, a P. Gregorio a S. Vincentio applicatur Achilli teſtudinem inſequenti, & tum ab illo, tum ab aliis ex illo, ſolvitur per progreſſiones geome-

tricas, quæ causa fuit, cur id hoc loco adduxerim. Verùm independenter etiam a progressionibus & expeditissimè quidem solvitur hunc in modum.

Milliariorum, quæ uterque absolvit quotidiè, differentia *ac* dividat milliaria *a*, quibus alter præcessit: quotiens *f* 9 erit numerus dierum, quo primus secundum assequetur. Quod si *f* ducas in *ib* provenient milliaria 108, in quorum termino se invicem assequentur.

Demonstratio.

QUoniam *ac* dividens *d* fecit *f*: ergo *ac* in *f* producit *d*; hoc est *ac* in *f* æquatur *d*. Quare si addatur utrique quod fit ex *cb* in *f*; erit *ac* in *f* cum *cb* in *f* æquale ipsi *d* cum *cb* in *f*. Atqui per I. Lib. II. *ac* in *f* cùm *cb* in *f* est *ab* in *f*. Ergo *ab* in *f*, (hoc est milliaria, quæ diebus *f* primus confecit) æquantur ipsi *d*, cum *cb* in *f* (hoc est milliaribus, quibus secundus præcesserat, unà cum his, quæ confecit diebus *f*). Ergo in termino dierum *f* primus secundum assecutus est. *Q. E. D.*

CAP. VII.

De mediis quotcumque proportionalibus inter duos datos numeros.

INter duos datos numeros datam mediorum proportionalium multitudinem invenire, nihil aliud est, quàm progressionem geometricam exhibere constantem dato numero terminorum, cujus extremi duo sint dati. Pertinet

igitur

igitur ad progressiones, quod hoc capite proponitur.

THEOREMA I.

Inter duos numeros A, B, qui se invicem multiplicantes quadratum numerum non producunt, medius proportionalis neque integer, neque fractus reperiri potest.

A2		5B
	X	
C10		Z.

Demonstratio.

SI enim possit, ille sit X, qui in se ductus faciat Z. Ergo per XX. Lib. VII. factus ex A in B, nempe C, æquatur Z. Quare cum numerus X sit radix quadrata Z, per constr. etiam numerus X erit radix quadrata facti ex A in B: quod est absurdum, cum demonstratum sit Cap. VII. Lib. III. numeri non quadrati radicem, neque integro numero ullo, neque fracto explicabilem esse.

Aliter. Medius proportionalis inter A, & B esset radix quadrata quæsiti ex A ducto in B, ut patet ex xx. ix. At radix ista, cum genitus ex A in B ex hypothesi sit non quadratus, nullo numero sive integro, sive fracto explicabilis est, ut ostendi L. III. C. VII. Ergo inter A, & B nullus cadit medius proportionalis sive integer, sive fractus. *Q. E. D.*

Est illa igitur arcana indoles numerorum, ut quamvis quibuslibet duobus datis semper exhiberi possit tertius proportionalis saltem fractus, medius non semper possit.

Sed & hoc observatione dignum, inter quos numeros non cadit medius unus, inter eos posse exhiberi medios duos, aut plures. Exponatur series progressionis duplæ; in hac 2, & 16 se invicem multiplicantes gignunt 32, qui quadratus non est, ac proinde inter eos unus medius non cadit: & nihilominus exhibentur inter eos medii duo, nempe 4, & 8. Pari modo 2 in 64 gignit 128, qui quia quadratus non est, inter 2, & 64 nequit reperiri medius unus, & tamen inter eos exhibentur medii quatuor, nimirum 4, 8, 16, 32.

1 2 4 8 16 32 64 128

THEOREMA II.

X a b c Z
d g
e h
f *k*
1

Dati sint duo numeri X, Z, vel primi absolutè, vel primi inter se, alterutro existente primo. Dico inter hos, aut quoslibet his proportionales nullos exhiberi posse medios proportionales sive integros, sive fractos.

Demonstratio.

Cadant, si fieri potest, inter X, & Z primò medii proportionales integri quocumque numero, puta tres *a*, *b*, *c*. Quia ergo inter X, Z inter se primos cadunt tres medii; etiam per IX. Lib. VII. inter ipsos, & unitatem totidem medii cadent *d*, *e*, *f*, & *g*, *h*, *k*. Ergo per XI. Lib. IX. quilibet mediorum *d*, *e*, *f* metitur X, & quilibet ipsorum *g*, *h*, *k* metitur Z, quod

Z, quod eſt abſurdum, cum alteruter datorum X, Z ponatur eſſe primus.

Cadant deinde inter X, Z, ſi fieri poteſt, medii proportionales fracti ab, cd, ef. Revocentur tam integri X, Z, quàm fracti medii ad fractiones ejuſdem nominis op, lp, mp, np, sp. Erunt igitur etiam hæ continuè proportionales. Quia verò harum fractionum communis eſt nominator p, erunt per Theor. VI. C. II. L. II. numeratores o, l, m, n, s ipſis fractionibus proportionales; ac proinde etiam ipſi o, l, m, n, s continuè proportionales erunt. Igitur inter extremos o, & s cadunt medii proportionales integri l, m, n. Sed quia per conſtructionem X, & Z æquantur fractis op, & sp, erit X, ad Z, ut fractus op eſt ad fractum sp, hoc eſt, ut o ad s. Quare cum inter o, & s cadant integri proportionales medii l, m, n, etiam inter X, & Z cadent per VIII. Lib. VIII. totidem medii proportionales integri, quod fieri non poſſe, jam oſtenſum in primâ parte.

$$X \quad \frac{a}{b} \quad \frac{c}{d} \quad \frac{e}{f} \quad Z$$

$$\frac{o}{p} \quad \frac{l}{p} \quad \frac{m}{p} \quad \frac{n}{p} \quad \frac{s}{p}$$

Eodem diſcurſu per VIII. L. VIII. demonſtrabitur, proportionales nullos reperiri medios inter numeros quoſcumque jam dictis proportionales.

PROBLEMA I.

Inter duos datos numeros unum medium proportionalem invenire.

Dati numeri se invicem multiplicent. Producti radix quadrata est medius quæsitus. Quod si productus non sit quadratus, Problema est impossibile, ut patet ex Theor. I.

PROBLEMA II.

Inter duos datos numeros, quotcumque medios proportionales exhibere.

		A	B		
1	c		d	e	f
1	R4) c		R4) d	R4) e	R4) f
A	R4)m		R4) n	R4) p	R4) s

Dati sint numeri A, B. Major B dividatur per minorem A, & quotiens sit *c*. Instituatur progressio geometrica incipiens ab 1, & per terminos uno plures (unitate non computatâ) numero mediorum quæsitorum: ut si cupis duos medios, progressio continuetur per terminos tres; si tres medios, per quatuor: & sic deinceps. In exemplo apposito progressio constat, præter unitatem, quatuor terminis *c*, *d*, *e*, *f*, quia petuntur tres medii.

Ex hisce terminis extrahatur radix cubica, si petantur medii duo; radix biquadrata, si tres; & sic deinceps. In exemplo nostro, quia petuntur medii tres, ex 1, *c*, *d*, *e*, *f* extrahantur radices biquadratæ, quæ sic exprimuntur: 1 R4) c R4) d R4) e R4) f. Ducantur deinde hæ radices in A minorem datum, ut fiant A R4) m R4) n R4) p R4) s.

Dico, inter duos datos tres medios esse R4) m R4) n R4) p, si quidem numeri *m*, *n*, *p* sint biqua-

biquadrati: ſin verò, Problema eſſe impoſſibile.

Demonſtratio.

QUoniam 1, *c*, *d*, *e*, *f* ſunt per conſtr. continuè proportionales, etiam radices eorum ſimiles 1, R4)c R4)d R4)e R4)f continuè proportionales erunt. Atqui A has multiplicans produxit A R4)m R4)n R4)p R4)s. Ergo, per XVII. VII. etiam hi producti erunt continuè proportionales; ac proinde inter A, & R4)s inventi ſunt tres proportionales medii R4)m R4)n R4)p. Quare, ſi oſtenderimus R4)s æquari B, liquebit propoſitum.

Quia per conſt. 1, *c*, *d*, *e*, *f* ſunt continuè proportionales, erit per VIII. Lib. IX. quartus *f* biquadratus radicis *c*. Ergo *c* eſt R4)f. Jam

		A	B	
1	c	d	e	f
1	R4) c	R4) d	R4) e	R4) f
A	R4)m	R4) n	R4) p	R4) s

quia A dividens B fecit quotientem *c*, ergo A ductus in *c* producit B. Quare cum *c* ſit R4)f, etiam A ductus in R4)f producet B. Sed A ductus in R4) f produxit R4) s. Ergo R4) s eſt B. Inter A igitur, & B medii ſunt inventi tres R4)m R4)n R4)p.

Quod ſi numeri *m*, *n*, *p* non ſint biquadrati; eorum biquadratæ radices R4)m R4)n R4)p nullis poterunt numeris integris, fractiſve explicari, ut demonſtratum eſt Lib. III. Cap. VII.,

VII. ; ac proinde impossibile erit quæsitum Problematis.

CAP. VIII.

De Combinationibus, & Permutationibus.

HOc Capite, quod ad progressiones quasi quædam appendix est, Arithmeticam hactenus explicatam, ac demonstratam concludo.

Quamvis voces illæ combinatio, & permutatio promiscuè possint accipi, visum est hic tamen eas distinguere hunc in modum. Datus sit certus rerum numerus, exempli gr. 10 litteræ. Si quæratur quot ex his 10 litteris haberi possint diversi binarii litterarum, & quot diversi ternarii, & sic deinceps, dicentur quæri omnes combinationes diversæ litterarum 10, quarum singulæ, & semper minori constant rerum numero, quàm is, qui datus est, & nulla rem eamdem bis continet, & nulla habet omnes res easdem cum ullâ alterâ. Quod si quæratur, quoties 10 illæ datæ litteræ misceri inter se possint sic, ut semper accipiantur omnes solo ordine mutato, dicentur quæri permutationes omnes 10 litterarum.

PROBLEMA I.

EX dato numero rerum combinationes omnes reperire.

Dentur exempli gr. 8. litteræ *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*. Prima *a* combinetur cum singulis ipsam sequen-

ſequentibus, nimirum cum *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, & provenient inde combinationes binarum diverſæ 7, nempe *ab*, *ac*, *ad*, *ae*, *af*, *ag*, *ah*. Secunda *b* combinetur cum ſingulis ipſam ſequentibus, nempe cum *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, & ſic deinceps ſingulæ datarum cum omnibus ipſas ſequentibus combinentur: provenient diverſi binarii omnes, qui ex dato litterarum numero haberi poſſunt.

Quod ſi ſingulos binarios diverſos jam repertos combines cum ſingulis litteris ipſos conſequentibus, prodibunt omnes diverſi terniones, qui haberi poſſunt ex dato numero litterarum. Ex. gr. binariorum inventorum primus *ab* combinetur cum ſingulis litteris ipſum ſequentibus, quæ ſunt *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, provenient terniones *abc*, *abd*, *abe*, *abf*, *abg*, *abh*. Sumatur jam alius quivis binarius *cf*; litteræ hunc ſequentes ſunt *g*, *h*; hic ergo dat terniones *cfg*, *cfh*, non plures.

Combinationes 8 litterarum

a b c d e f g h.

Binarii diverſi 28.

ab,ac,ad,ae,af,ag,ah.
bc,bd,be,bf,bg,bh.
cd,ce,cf,cg,ch.
de,df,dg,dh.
ef,eg,eh.
fg,fh.
gh.

Ter-

Terniones diversi 56.

abc,abd,abe,abf,abg,abh.
acd,ace,acf,acg,ach.
ade,adf,adg,adh.
aef,aeg,aeh.
afg,afh.
agh.
bcd,bce,bcf,bcg,bch.
bde,bdf,bdg,bdh.
bef,beg,beh.
bfg,bfh.
bgh.
cde,cdf,cdg,cdh.
cef,ceg,ceh.
cfg,cfh.
cgh.
def,deg,deh.
dfg,dfh.
dgh.
efg,efh.
egh.
fgh.

Quaterniones diversi 70.

abcd,abce,abcf,abcg,abch.
abde,abdf,abdg,abdh.
abef,abeg,abeh.
abfg,abfh.
abgh.
acde,acdf,acdg,acdh.
acef,aceg,aceh.
acfg,acfh.

acgh.
adef,adeg,adeh.
adfg,adfh.
adgh.
aefg,aefh.
aegh.
afgh.
bcde,bcdf,bcdg,bcdh.
bcef,bceg,bceh.
bcfg,bcfh.
bcgh.
bdef,bdeg,bdeh.
bdfg,bdfh.
bdgh.
befg,befh.
begh.
bfgh.
cdef,cdeg,cdeh.
cdfg,cdfh.
cdgh.
cefg,cefh.
cegh.
cfgh.
defg,defh.
degh.
dfgh.
efgh.

Rurſum, ſi omnes jam inventi terniones combinentur cum litteris ipſos ſequentibus, prodibunt omnes quaterniones diverſi poſſibiles. Et ſic deinceps.

Ratio hujus conſtructionis per ſe ſatis eſt mani-

manifesta. Ad pleniorem porro intelligentiam totius methodi

Observa I. Si ex dato rerum numero capiantur duo numeri, qui simul componunt ipsum datum numerum, eorum combinationes sunt æquè multæ. Dentur 8 litteræ, & ex numero 8 sume 1, & 7, quæ simul efficiunt 8, poterunt ex 8 sumi octo diversæ unitates, ac proinde etiam 8 diversi litterarum septenarii.

Rursum ex 8 cape 2, & 6, quæ juncta efficiunt 8. Methodo jam traditâ ex 8 litteris habentur combinationes binarum diversæ 28, totidem ergo erunt etiam diversæ combinationes senariæ. Sumantur ex 8 rursum 3, & 5, quorum summa est 8. Quoniam combinationes ternariæ diversæ reperiuntur 56, etiam totidem erunt diversæ combinationes quinariæ. Quæ omnia sunt manifesta consideranti.

Observa II. Quò numeri, secundum quos fit combinatio, utrimque magis accedunt versus medium, eò plures exhibent combinationes. Sic ex datis litteris 8 plures habentur biniones, & senarii diversi, quàm unitates, & septenarii; item plures diversi terniones, & quinarii, quàm biniones, & senarii.

Observa III. Cum numerus rerum datus est par, tunc illius semissis maximum dabit numerum combinationum, ut cum litterarum numerus datur 8, si litteræ combinentur quaternæ, habebitur maximus combinationum numerus.

Cum verò numerus rerum datur impar, tunc duo numeri contigui, quorum summa facit datum numerum rerum, exhibent maximum numerum combinationum. Ut si dentur

9 litte-

9 litteræ, numeri contigui, quorum summa faciat 9, sunt 4, & 5. Quare si litteræ combinentur quaternæ, vel quinæ; maximus habebitur numerus combinationum.

Quoniam verò ex methodo jam traditâ sciri nequit combinationum numerus, nisi singulæ exhibeantur, regulam adjungo ex Petro Herigono, qua facilè is innotescat.

Reg. Datus sit rerum numerus *a*, & alius eo minor *b*, secundum quem res datæ sint combinandæ. Instituantur duæ

a	c		
8.7.6.	336	{	56
3.2.1.	6		f
b	e		

progressiones Arithmeticæ per subductionem unitatis a numeris datis *a*, *b*, tot terminorum, quot minor *b* habet unitates. Tum numerus *c*, genitus ex multiplicatione terminorum majoris progressionis, dividatur per numerum *e* productum ex multiplicatione terminorum progressionis minoris. Quotiens erit quæsita combinationum multitudo, quæ haberi potest, si res datæ secundum numerum *b* combinentur.

Quod si lubeat scire in quot combinationibus res singulæ reperiantur, multitudinem combinationum duc in numerum, secundùm quem res sunt combinatæ; productum divide per datum numerum rerum: quotiens ostendet, in quot combinationibus unaquæque res reperiatur.

Apposui exemplum horum omnium in litteris 8: *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*. Ex his diversi habentur binarii 28, terniones 56, quaterniones 70, quinarii 56, senarii 28, septenarii 8,

qui

qui respondent totidem diversis unitatibus, ut senarii binariis, & quinarii ternionibus. Soli porro binarii, terniones, & quaterniones hic sunt expressi: cæteri eâdem arte reperiuntur. Itaque litteræ octo *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, admittunt combinationes 254: permutationes dabit Caput sequens.

PROBLEMA II.

Dato numero, omnes permutationes possibiles invenire.

Dentur exempli gr. litteræ 10 *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *i*, *k*. Oporteat omnes possibiles 10 litterarum ordines diversos exhibere.

Methodus, ejusque demonstratio traditæ sunt in scholio Prop. XIX. Lib. VIII., quem locum consule. Inde sequens permutationum tabella confecta est.

Nu.Rer.	Permut.
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5040
8	40, 320
9	362, 880
10	3)628, 800
24	620,448(401,733(239,439)(360,000.

Quod si in dato numero rerum aliquæ similes sint,

sint, seu eædem; ut si detur hæc vox *Ignatius* 8 litteris constans, in qua duæ litteræ occurrunt eædem, nempe *i*, permutationum numerus invenietur hac regulâ, ex *a* Kirchero nostro deprompta.

a Tom. 2. musurg. pag. 5.

Numerus permutationum totius dividatur per numerum permutationum, quas subire possunt res similes, quotiens dabit quæsitum.

Litteræ 8 hujus vocis *Ignatius*, si omnes essent diversæ, admitterent permutationes 40, 320. Litteræ eædem sunt 2. Porro 2 permutationes admittunt duas. Igitur 40, 320 dividantur per 2. Quotiens 20, 160. dabit omnes ordines diversos possibiles 8 litterarum, quibus constat vox *Ignatius*.

Corollaria.

I. HOmines 10 possunt mensæ accumbere plus, quàm termillionesies, sic ut numquam sit idem ordo accumbentium. Rerum quippe 10 ordines diversi sunt 3 (628, 800.

II. Mille milliones Scriptorum, mille annorum millionibus, non scribent omnes 24 litterarum alphabeti permutationes, licèt singuli quotidie absolverent 40 paginas, quarum unaquæque contineret 40 diversos ordines litterarum 24.

Id breviter sic ostendo. Quoniam unus Scriptor uno die scribit 40 paginas, quarum singulæ contineant 40 ordines diversos litterarum 24; ductis igitur 40 in 40, fiunt diversi ordines 1600, quos uno die scribet Scriptor unus. Ergo si demus anno dies 366, hoc est plures,

quàm ei debeantur, scribet Scriptor unus anno uno 24 litterarum ordines, sive purmutationes 585, 600: fit enim hic numerus ex 1600 ductis in 366.

Annis igitur 1, 000 (000000), hoc est mille millionibus annorum scribet unus permutatio-

A 585 (600000 (000000

B, 585, 600 (000000 (000000 (000000

C. 620, 448 (401, 733 (239, 439 (360, 000

nes diversas A: hic enim numerus oritur ex 585, 600 ductis in 1, 000 (000000. Quare si mille annorum millionibus Scriptor unus scribat permutationes, seu ordines diversos A; Scriptorum mille milliones eodem tempore, videlicet mille annorum millionibus, scribent litterarum 24 tot permutationes diversas, quot fiunt ex 1, 000 (000000, hoc est mille millionibus, ductis in A. Numerus verò permutationum, ex hac multiplicatione genitus, est B, qui adhuc minor est numero C, designante permutationes omnes 24 litterarum.

III. Ex problemate eodem reperientur omnia Anagrammata possibilia nominis dati. Quod si aliquæ litteræ in nomine dato sint eædem, adhibenda insuper erit regula superiùs tradita.

IV. Ut habeantur omnia vocabula, quæ ex litteris alphabeti 24 concinnari possunt, oportebit per Probl. I. omnes 24 litterarum combinationes binarias, ternarias, quaternarias, quinarias, senarias, &c. exhibere; & primùm quidem combinationes omnes strictè acceptas,

de

de quibus agitur in I. Probl., quæ non solùm omnes inter se diversæ sunt, sed etiam nullam litteram bis continent: deinde verò etiam eas omnes, in quibus litteræ una, vel plures sæpius recurrunt, quarum inventio ex prioribus satis est manifesta. Tum verò combinationum singularum litteræ per Probl. II. diversimodè insuper erunt permutandæ toties, quoties possunt. Ex omnibus illis tum combinationibus, tum permutationibus numerus vocabulorum ingens quidem ille, & prope immensus, sed tamen certus, atque determinatus procreabitur.

FINIS.

APPENDIX,

Qua Theoria, & Praxis Arithmeticæ etiam in Figuris demonstratur.

Hic epilogus est minùs in Tyronum eruditionem, quàm in Eruditorum gratiam, seu potiùs in hujus Arithmeticæ complementum, ac ornamentum. Cum enim quatuor illius partes præcipuæ, scilicet additio, subtractio, multiplicatio, & divisio super libris ipsis præpositis, illorumque Prolegomenis totaliter fundentur, & a libris postpositis admodum perficiantur: nunc restat, ut pars ejus quælibet figurâ aliquâ geometricâ, iisdem principiis demonstrandâ, in postremum adornetur.

ADDITIO.

Tabula 6. Fig. 1.

Data sint triangula simul addenda, ut summa sit triangulum datis æquale.

Si triangula data sint inæqualis altitudinis, ut ABC, CDE, EFG; ad æqualem altitudinem sunt reducenda, ut patet ex figuræ constructione, quæ pendet ex primis Geometriæ elementis Tyronibus vix ignotis. Hanc tamen praxim, ad faciliorem hujus axiomatis intelligentiam, hìc apponemus.

Sint igitur triangula ABC, EFG, ad altitudinem CDE reducenda. Ad altitudinem CD du-

CD ducatur parallela HL contra basim A G *a*: postea linea CB producatur in H *b*, unde ducatur linea HA: & ducta ipsi parallela I B determinabit punctum I, ex quo ducenda est linea IH, quæ triangulum IHC perficit, illudque triangulo ABC æquale *c* constituit ad altitudinem requisitam.

a p. 31. l. 1.
b postul. 2. l. 1.
c p. 37. l. 1.

Ad eamdem altitudinem reducetur triangulum E F G, si ductâ lineâ L G, & ipsi parallelâ F *K*, ducatur ex puncto *K* linea *K*L, quæ triangulum *K* L E perficit, illudque triangulo E F G æquale constituit ad altitudinem requisitam. Demonstratio ut supra.

Sed sicut ducendo lineam EH, triangulum I H E est æquale triangulo A B C + C D E *d*; sic etiam ductâ lineâ *K*H, triangulum I H *K* est æquale A B C + C D E + E F G. *e*

d p. 37. l. 1. Axiom. 2. l. 1.
e ibidem.

Quando autem triangula sunt altitudinis æqualis, ut I H C, C D E, E L *K*: bases eorum I C, C E, E *K* componantur in rectam lineam, cui parallela H L ducatur in summitate angulorum; tunc si ex extremitatibus basis generalis I *K* ducantur duæ lineæ ad quodlibet punctum lineæ parallelæ HL, etiam ad angulum datum, ut in 2da fig. CP, constituent triangulum, I H *K* *n*, sive I M *K* *o* æquale triangulis datis simul additis.

Tabula 6. Fig. 1. & 2.
n. Fig. 1.
*o*p. 1. lib. 6 Fig. 2.

Demonstratio.

HÆc praxis a Tyronibus si attentè, consideretur, sufficienter illis patebit ex principiis *a* in hoc opere contentis: summa enim trianguli I H C + C D E + E L *K* semel continetur in triangulo I H *K*, aut I M *K*.

a Axiom. 2 3 4 5. l. 7. Definit. 13. 14. l. 7.

Ut tamen peritioribus, qui rigorem geometricæ demonstrationis postulant, fiat satis; sequentem *b* hic adjungimus, de qua consuli potest Geometria supra *c* citata.

b De saiguil.
c pag. 2.
Tabula 6. Fig. 1.

EKH est æquale ELK, per Proposit. XXXVII. Lib. I.
EHC est æquale CDE, per eamdem.

Fig. 1. Ergo CHK est æquale ELK + CDE, per ax. II. Lib. I. Sed IHC est etiam sibi æquale IHC, per idem. Ergo IHK est æquale IHC + ELK + CDE. Cum autem per constructionem, sive per transmutationem figurarum, quam primò supposuimus etiam Tyronibus vix ignotam, IHC sit æquale ABC, & ELK etiam æquale EFG: evidens est, quod si triangulum IHK *a*, aut IMK *b* sit æquale IHC + ELK + CDE triangulis æqualis altitudinis, ut demonstratum est; erit etiam æquale ABC + CDE + EFG triangulis inæqualis altitudinis. *Q. E. D.*

a Fig. 1.
b Fig. 2.
Fig. 1.

PROBLEMA ALTERUM.

Triangulum sit triangulo addendum, ut summa sit Parallelogrammum, vel quadratum.

Tabula 7. Fig. 1. Si triangula sint æquè alta, ut EDA, & AIG, ad dimidiam partem basis fiat Parallelogrammum BCRG ad eamdem altitudinem, & erit ipsis æquale. Fig. 2. Si verò triangula non sunt æquè alta, ut DEF, & FGH, revocentur ad eam-

eamdem altitudinem, ut supra, & in basi communi fiat Parallelogrammum ad dimidiam altitudinem. Si autem etiam in quadratum mutare desideres hæc duo triangula; confectum ex iis Parallelogrammum revocetur ad quadratum. Sit nempe Parallelogrammum H I K O Fig. 2. æquale triangulis D E F, F G H. Producatur latus ejus HO in M, ut OK sit æquale O M; describatur super H M semicirculus, & a puncto O erigatur perpendicularis O Q, cujus quadratum O Q P N erit æquale Parallelogrammo, & per consequens triangulis datis.

Eodem modo fieri potest additio omnium specierum figurarum, & illarum transformatio in quaslibet figuras additis diversas, & ad magnitudinem requisitam, aut convenientem. Cum autem hanc materiam separatim, Deo juvante, simus brevì tractaturi; aliquod illius specimen ad rem presentem potest sufficere, sive in additione, sive in aliis Arithmeticæ partibus.

SUBTRACTIO.

D*Atum sit triangulum a triangulo subtrahendum, ut maneat triangulum.*

Triangulum D E I subtrahendum sit ex BAD. Si sint æquè alta *a*, transferatur basis DI in D O, & ducatur A O, tunc OAD erit æquale D E I *a*; & manebit pro excessu triangulum B A O. *b* Tabula 8. Fig. 1. *a* p. 1. l. vi. *b* Defin. 4. l. vii. & p. 4. hujus.

Si verò triangula non sint æquè alta, ut B A C, C D G; revocetur C D G ad CFH, & factâ subtractione, ut supra, remanebit Fig. 2.

pro excessu triangulum BAS. Demonstratio patet ex constr., & ex præc. Problem.

MULTIPLICATIO.

Detur quadratum per quemlibet numerum 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c. multiplicandum, ita ut duplum, triplum, quadruplum, & sic in infinitum multiplum constituatur.

Tabula 9. Sit quadratum ABCD duplum constituendum. Sumatur diagonalis AC, & ducatur linea illi similis ex A in E, & in G; exinde per parallelas EF, FG *a* quadratum AEFG erit duplum quadrati dati ABCD.

a p. 31. l. 1.

Quod si idem quadratum ABCD sit triplum constituendum; sumatur linea BG, & ducatur ex A in K, & in I; exinde per parallelas KH, HI quadratum AKHI triplum erit quadrati dati ABCD, quod eodem modo quadruplum, 5um, 6um, 7um &c. constituetur.

Si per 9 sit multiplicandum; sumatur linea 4, & 5 sive VN, & erit latus Quadrati requisiti ARMT. Si per 13. linea 4, & 9.

Si per 19; linea 6, 13, seu QS constituet latera Quadrati AZXY.

Si per 38; Diagonalis YZ erit latus Quadrati ABCD per 38 multiplicati; & sic in infinitum, quod admiratione dignum Tyronibus apparebit.

Multiplicatio Quadrati fieri potest alio modo, cujus demonstratio *a* eadem est, licèt constructio *b* diversa.

a Desaguil. p. 47. l. 1. def. 15. l. 7. ax. 12. 5. 7. l. 7.
b Tabula 10.

DI-

DIVISIO.

DEtur circulus ADCZ in 32 partes dividendus. Tab. 11.

Ducatur linea DC ad quartam partem circuli, & dividatur in duas partes æquales per perpendicularem BE, quæ erit ſemidiameter circuli EOKFR.

Poſtea ducatur linea RO, cujus media pars, ſeu perpendicularis QB erit ſemidiameter circuli QPYS. Sicque ex lineis IN, HM, GL fiant circuli: tunc in circulo dividendo erunt quinque circuli, quorum

REOKF eſt	$\frac{1}{2}$	Circuli dati ADCZ.
QPYS	$\frac{1}{4}$	ejuſdem
IMrrT	$\frac{1}{8}$	
HLiiV	$\frac{1}{16}$	
Gdee	$\frac{1}{32}$	circuli in tot partes dividendi.

Demonſtratio eadem eſt, ac præcedentis Problematis, & eſt ſimili admiratione digniſſima,

rationes, nec non trianguli ad
tiones. Illas igitur benevolo,
ctori speculandas relinquimus i
hìc appositâ *a*, quæ tamquam
a Tabula ultima. Appendicis, totam istam Ari
Theoricam, quàm Practicam
nabit, sicque ejus demonstratio
Corollarii, huic opusculo fine
b Desaiguiliers. ponet.

Demonstratio,

[ ]T 14 est ad 11, sic Quad
ad Circulum A B C *a*: &
Tabula ultima. sic etiam AC est ad DC *b*. Inde
esse ad DC, ut Quad. AC ad Ci
a Archimed. 2. 1. Et ut A C est ad D C; sic etiam
b ex coll. ad Quad. B C *d*.
c Euclid. 11. 5. Ergo Quad. AC est ad Quad.
AC est ad Circul. A B C *e*. Sub
d 19. 20. 6. æqual. Quad. A C.
e 11. 5. Sicque Quad. BC æquale est
f 9. 5. 3. 1. *f*. Sed Quad B C est æquale
g x coll. Ergo Quad. E F est æquale Circ
h 1. Ax. Eucl. 1. Sic etiam per XXXVII. & X
Euclid. potest demonstrari Tria
æquale Quad. EF, & triang. G
Triang. MLN; sicque Quad. E
i 1. Ax. Eucl. 1. Triang. MLN *i*. Sed Quad. E
k ut supra. Circul. A B C *k*. Ergo Triang.
est Circ. A B C *l*. *Q. E. D*
l Ax. 1. l. 1. Cum autem Quad. E F sit etia
rallelogrammo M N *o*. Inde se
o 43. 1. hujus appendicis figuras in hac
cum eâdem proportione contine
majori speculatione dignissimum
secuturo opere pleniùs pertracta

NICOLAI
DE MARTINO
DE
PERMUTATIONIBUS,
ET
COMBINATIONIBUS
OPUSCULUM.

DE PERMUTATIONIBUS, ET COMBINATIONIBUS.

DOctrinam de permutationibus, & combinationibus utilissimam esse, tum in rimandis naturæ arcanis, cùm in Civilis vitæ usu, neminem latere arbitror, nisi quem fugiat, infinitam varietatem, quæ tam in naturæ operibus, quàm in Mortalium actionibus elucet, non aliunde, quàm ex diversa partium permutatione, aut combinatione originem trahere. Notum quippe est, quàm difficile sit, modos omnes recensere, quibus res plures, ad effectum aliquem producendum concurrentes, simul permutari possunt, aut combinari. Quin etiam dici potest, nullum esse vitium, in quod Homines, vel maximè prudentes, frequentiùs impingunt, quàm quod vulgò dicitur imperfecta partium enumeratio. Itaque doctrina illa, quæ huic medetur defectui, docetque enumerare modos omnes, quibus res plures simul permutari possunt, aut combinari, merito suo utilissima censenda est. Quocirca non exiguum operæ prætium facturum me esse arbitror, si doctrinam istam de permutationibus, & combinationibus, leviter a Tacqueto traditam, in Tyronum gratiam paullo fusiùs in hoc opusculo exponam.

CAP.

C A P. I.

De Permutationibus.

DUæ, aut plures res dicuntur inter se permutari, quum ita quidem permiſcentur, ut eâdem rerum servatâ multitudine, ordo situsve tantummodo inter ipsas permutetur. Qua ratione dicentur quæri duarum, aut plurium rerum permutationes omnes, quum quæritur quoties res illæ permiſceri poſſint eâ ratione, ut omnibus semper acceptis, solus ordo situsve mutetur.

Jam duarum rerum diversarum *a*, & *b* duæ esse poſſunt permutationes diversæ. Quippe vel *a* præcedit, & sequitur *b*, eritque permutatio una: vel viciſſim *a* sequitur, & præcedit, eritque permutatio altera. Quumque ex tribus rebus diversis *a*, *b*, *c* intereà ac una primum obtinet locum, reliquæ duæ bis poſſunt permutari: erunt trium illarum rerum diversarum ter duæ, hoc est sex diversæ permutationes. Atque ita quoque si quatuor extiterint res diversæ *a*, *b*, *c*, *d*, quia dum una primum tenet locum, tres reliquæ sexies ordinem variabunt, fient illarum rerum permutationes omnes diversæ quater sex hoc est viginti quatuor. Proindeque generaliter numerus permutationum diversarum, quas plures res diversæ subire poſſunt, toties continebit numerum permutationum, quas recipiunt res una pauciores, quot sunt unitates in ipso rerum numero.

Hinc datis quotcumque rebus diversis, facile

le erit numerum omnium permutationum diversarum invenire. Numerus namque permutationum, quas plures res diversæ subire possunt, toties continet numerum permutationum, quas recipiunt res una pauciores, quot sunt unitates in ipso rerum numero. Itaque si datus rerum numerus multiplicetur per numerum permutationum, quas recipiunt res una pauciores, habebitur permutationum numerus quæsitus. Jam verò duæ res diversæ nonnisi dupliciter possunt permutari. Itaque ad habendum numerum permutationum, quas suscipere possunt tres res diversæ, multiplicari debet 2 per 3. Atque ita quoque multiplicandi erunt inter se mutuò numeri 2, 3, 4, ut habeatur numerus permutationum, quas suscipiunt quatuor res diversæ. Quocirca generaliter si omnes numeri post unitatem naturali ordine se consequentes ad datum usque rerum numerum inclusivè multiplicentur per se mutuò, productum numerum permutationum exhibebit.

Verumtamen si in dato rerum numero res aliquæ sint similes, sive eædem, hoc est una eademque res bis, aut sæpius recurrat; tunc numerus permutationum multo minor evadet. Sed ex positis principiis facile quoque erit illum invenire. Nam quum plures res sunt similes, eæ inter se nonnisi semel possunt permutari. Unde omnes illæ permutationes, quæ orirentur, si res illæ essent diversæ, jam propter earum similitudinem evanescent. Itaque quum in dato rerum numero plures res sunt similes, sive eædem, habebitur numerus permutationum omnium diversarum, si numerus permutationum, quas suscipere potest datus rerum nume-

numerus, si omnes essent diversæ, dividatur per numerum permutationum, quas subire possunt res similes, si utique velut dissimiles considerentur. Ita si datus rerum numerus sit 5, & in eo res eadem ter recurrat, erit 20 numerus permutationum diversarum; quia si dividatur 120 numerus omnium permutationum per 6 numerum permutationum, quas suscipiunt tres res tantummodo; fiet quotiens 20

Quo si non una, sed duæ, aut plures res in in dato rerum numero sæpius recurrant, tunc habebitur numerus omnium permutationum diversarum, si numerus permutationum, quas suscipere potest datus rerum numerus, si omnes essent diversæ, dividatur per productum ex numeris permutationum, quas seorsim recipere possunt singulæ res similes, quæ sæpius recurrunt, secundùm propriam cujuscumque multitudinem. Qua ratione si septem sint res permutandæ, inter quas una reeurrat bis, altera ter; numerus permutationum omnium diversarum erit 420.

Nam septem res permutari possunt inter se 5040 modis diversis: proindeque quia duæ bis, & tres sexies inter se possunt permutari, diviso 5040 per 12 productum ex 6 in 2, fit quotiens 420.

CAP.

CAP. II.

De Combinationibus secundùm omnes exponentes.

Combinationum nomine veniunt rerum conjunctiones, in quibus nullâ ordinis situsve rerum servatâ ratione, tantùm numerus consideratur, quo res datæ simul sunt conjungendæ. Qua ratione dicentur quæri omnes combinationes diversæ plurium rerum datarum, quum quæritur quoties ex dato illo rerum numero binæ, ternæ, aut quaternæ accipi possunt sic, ut ipsarum unaquæque numquam sumatur sæpius, quàm semel.

Jam numerus, secundùm quem res datæ conjunguntur, dicitur exponens combinationis. Hoc pacto, si res binæ sumantur exponens erit 2; si ternæ, 3; si quaternæ, 4; atque ita deinceps. Sed res, secundum hos exponentes junctæ, dicuntur binarii, ternarii, aut quaternarii; vel etiam biniones, terniones, aut quaterniones: & consequenter dicendæ sunt uniones, quando res sumuntur singulæ: & nulliones, quum nulla planè sumitur.

Sed priusquam de inveniendis combinationibus secundùm datum quemvis exponentem agamus, tradenda nobis est methodus, qua inveniri possint combinationes secundùm omnes exponentes conjunctim. Id itaque commodè fieri potest in hunc modum. Sunto combinandæ modis omnibus litteræ a, b, c, d, &c. Fiant tot series, quot litteræ; sed ita tamen,

ut in primâ ſerie reperiatur ſola littera *a*; in ſecundâ *b*, tum ſola, tum conjuncta, cum ipſa *a*; in tertiâ *c*, primò ſeorſim, deinde verò conjuncta cum omnibus terminis præcedentibus; in quartâ *d*, ſimiliter primò ſola, deinde verò addita terminis omnibus præcedentium ſerierum; atque ita deinceps.

a
b. ab.
c. ac. bc. abc.
d. ad. bd. cd. abd. acd. bcd. abcd.

Hac ſiquidem ratione manifeſtum eſt, datas litteras omnifariam, ac ſecundùm omnes exponentes inter ſe mutuò combinari. Et quoniam litera, quæ cujuſque ſeriei agmen ducit, primò ponitur ſola, deinde unà ſecum aſſumit terminos omnes præcedentium ſerierum; manifeſtum eſt etiam, in unaquaque ſerie unum ampliùs terminum reperiri, quàm in omnibus aliis ſeriebus antecedentibus ſimul: proindeque termini dictarum ſerierum progreſſionem geometricam duplam ab unitate conſtituent: quandoquidem per oſtenſa a Tacqueto in Theoremate XV. progreſſionum geometricarum, progreſſionis geometricæ duplæ ab unitate eam quoque naturam eſſe conſtat, ut ſumma terminorum quotlibet unitate aucta ſequentem terminum exhibeat.

Atque hinc facile modò erit, omnes terminos illarum ſerierum in unam ſummam colligere, & conſequenter invenire combinationes rerum datarum ſecundum omnes exponentes conjunctim. Quum enim termini illi conſti-

tuant

tuant ab unitate progreſſionem geometricam duplam, & quot ſunt unitates in dato rerum numero, tot ſint ſeries eorumdem terminorum, ſatis erit in progreſſione geometricâ duplâ, quæ initium habeat ab unitate, in unum colligere tot terminos, quot ſunt unitates in numero rerum dato. Sed totidem termini, progreſſionis geometricæ duplæ ab unitate colligentur in unum, ſi capiatur terminus ſubſequens ejuſdem progreſſionis, idemque unitate mulctetur: ob eamdem illam proprietatem modo memoratam, quod in progreſſione geometricâ duplâ ab unitate, ſumma terminorum quotlibet unitate aucta ſequentem terminum exhibeat.

Et quoniam in progreſſione geometricâ duplâ ab unitate unuſquiſque terminus invenitur, ſi numerus binarius toties per ſe ipſum multiplicetur, quot eum in progreſſione termini præcedunt; habebitur ſubſequens ille terminus, multiplicando binarium toties per ſe ipſum, quot ſunt termini præcedentes, hoc eſt quot ſunt unitates in dato rerum numero. Proindeque regula pro inveniendis combinationibus omnibus ſecundùm omnes exponentes conjunctim talis erit: multiplicetur binarius toties per ſe ipſum, quot unitates continet datus rerum numerus; auferatur deinde unitas a producto, eritque reſiduum combinationum numerus quæſitus. Ita ſi numerum rerum datarum vocemus n, erit numerus omnium combinationum ſecundùm omnes exponentes conjunctim $2 - 1$, intelligendo pro 2^n eam binarii poteſtatem, quam deſignat numerus n.

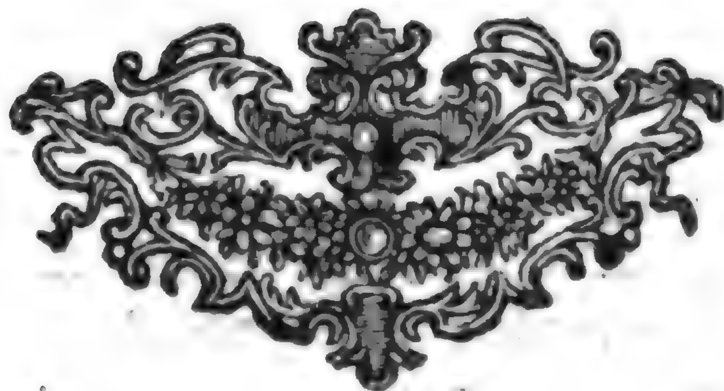
CAP. III.

De Combinationibus secundùm singulos exponentes.

TRaditâ methodo de inveniendis combinationibus secundùm omnes exponentes conjunctim, sequitur, ut videamus qua ratione inveniendæ sint combinationes secundùm singulos exponentes. Et quidem ex ipsa illa methodo qua superiori capite inventæ sunt combinationes secundùm omnes exponentes conjunctim, manifestum est, litteram, quæ cujuslibet seriei caput est, adjunctam unionibus serierum præcedentium efficere seriei suæ biniones, adjunctam binionibus efficere terniones, ternionibus, quaterniones, atque ita deinceps: proindeque in unaquaque serie numerus combinationum secundùm datum quemvis exponentem æqualis erit numero combinationum secundùm exponentem unitate unâ minorem, quæ in præcedentibus seriebus inveniuntur.

Ex quo facile modò erit Tabulam conficere, quæ ad oculum nobis ostendat combinationes secundùm singulos exponentes, quæ in unaquaque serie reperiuntur. Nam uniones in singulis seriebus reperiuntur singuli. Itaque in unaquaque serie loco unionum unitas ipsa scribi debet. Et quoniam in prima serie, præter unionem unam, nullæ aliæ occurrunt combinationes, proinde in eâ loca alia cifris sunt replenda. Sed collectis ordine unionibus omnibus serierum præcedentium, reperietur in secun-

cunda ſerie unum eſſe binionem, duos in tertia, tres in quarta, atque ita deinceps. Pariterque collectis binionibus, invenietur nullum eſſe ternionem in ſecunda ſerie, ſed unum in tertia, tres in quarta, ſex in quinta, decem in ſexta, &c. Atque ita quoque collectis ternionibus, cognoſcetur nullum eſſe quaternionem tam in ſecunda, quàm in tertia ſerie, ſed unum in quarta, quatuor in quinta, decem in ſexta, viginti in ſeptima &c. Eodemque artificio omnes aliæ combinationes cujuſcumque ſeriei poterunt ſucceſſivè inveniri.



TABULA

Combinationum secundùm singulos exponentes.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0
4	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0
5	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0
6	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0
7	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0
8	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0
9	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0
10	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

Hac

Hac tabulâ constructâ, consideremus modò tres ejus proprietates. Prima proprietas est illa ipsa, per quam tabulæ constructionem obtinuimus, & cujus ope nullo negotio eadem tabula in infinitum potest continuari: nimirum, quod quilibet terminus in unaquaque columna verticali æquatur summæ omnium superiorum præcedentis columnæ verticalis. Ex quo fit, ut ad inveniendum optatum quemcumque terminum in quacumque columna verticali, satis sit in unum colligere omnes terminos superiores, qui sunt in præcedenti columna verticali.

Secunda proprietas est, quod columnarum verticalium prima nullam habeat cifram in principio, sed unam secunda, duas tertia, tres quarta, atque ita deinceps. Ex quo fit, ut si in iis columnis sumantur termini æquè multi, quorum multitudinem designet littera a; multitudo terminorum significativorum, exclusis cifris initialibus, sit a in prima columna $a - 1$ in secunda, $a - 2$ in tertia, $a - 3$ in quarta, atque ita de aliis.

Tertia proprietas est, quod in unaquaque columna verticali si aliquis terminus significativus multiplicetur per numerum terminorum significativorum, qui eum præcedunt, & productum dividatur per numerum illius columnæ; hoc est per 1 in prima columna, per 2 in secunda, per 3 in tertia, atque ita deinceps, quotiens sit summa ex præcedentibus terminis significativis. Unde facile modò erit, terminos quotcumque cujuscumque columnæ verticalis in unam summam colligere.

Sumantur enim in unaquaque columna verticali ab initio termini æquè multi, & designet eorum multitudinem littera a. Itaque ob secundam proprietatem multitudo terminorum significativorum erit a in prima columna, $a-1$ in secunda, $a-2$ in tertia, $a-3$ in quarta, atque ita deinceps. Et quoniam in prima columna quisque terminus est unitas, designabit in eâ eadem littera a, vel quod idem est $\frac{a}{1}$ non modò multitudinem, verùm etiam summam terminorum significativorum.

Hinc porro, quia per primam proprietatem $\frac{a}{1}$ est terminus, qui in secunda columna proximè sequitur, proinde si $\frac{a}{1}$ multiplicetur per $a-1$, & productum dividatur per 2, erit per tertiam proprietatem quotiens $\frac{a.a-1}{1.2}$ summa terminorum in secunda columna. Quumque summa ista sit terminus proximè insequens in tertia columna, si eadem summa multiplicetur per $a-2$, & productum dividatur per 3, erit quotiens $\frac{a.a-1.a-2}{1.2.3}$ summa terminorum in tertia columna: Atque ita quoque eadem summa $\frac{a.a-1.a-2.a-3}{1.2.3.4}$ terminorum erit in

quarta $\frac{a.a-1.a-2.a-3.a-4}{1.2.3.4.5}$ columna, in quinta columna, & ſic in infinitum: notando, puncta quantitatibus interjecta continuam earum quantitatum multiplicationem deſignare.

Patet autem ſummam iſtam deſignari per duplicem progreſſionem arithmeticam, unam a multitudine aſſumptâ terminorum per unitatis decrementum deſcendentem, alteram aſcendentem ab unitate per unitatis incrementum, & utramque tot terminorum, quot unitates continet numerus columnæ. Unde cum eadem ſumma deſignet combinationes omnes, quæ fiunt ex totidem rebus, quot ſunt termini aſſumpti, & ſecundùm eum exponentem, quem columnæ numerus deſignat; perſpicuum eſt, ad inveniendas combinationes omnes, quæ ex pluribus rebus fieri poſſunt ſecundùm datum quemvis exponentem, hanc regulam obſervandam eſſe.

Nimirum fiant duæ progreſſiones arithmeticæ; una deſcendens per unitatis decrementum a numero rerum combinandarum, altera aſcendens ab unitate per unitatis incrementum, & utraque porro tot terminorum, quot unitates habet combinationis exponens. Multiplicentur deinde inter ſe mutuò, tam termini prioris progreſſionis, quàm termini alterius; & diviſo producto ex primis per productum ex ſecundis, erit quotiens quæſita multitudo combinationum, quæ ſecundum datum exponentem inſtitui poſſunt. Quæ quidem eſt ipſiſſima regula, quam ex Petro Herigono attulit Tacquetus.

CAP.

CAP. IV.

De Combinationibus, in quibus eadem res sæpius recurrere potest.

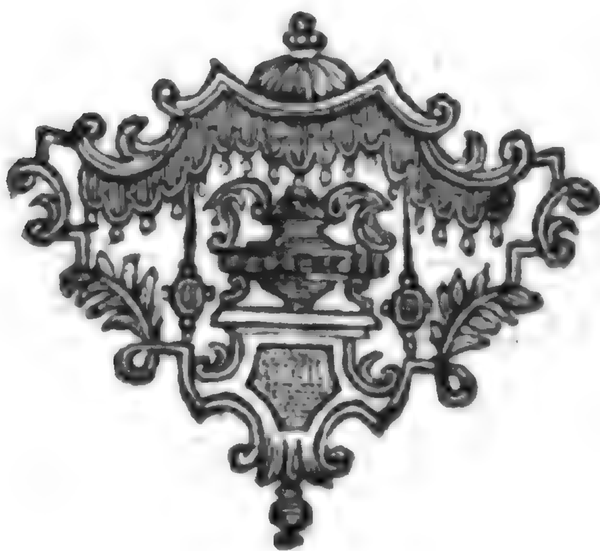
IN combinationibus rerum inveniendis, tam secundùm omnes conjunctim, quàm secundùm singulos exponentes, illud supposuimus, nullam rem secum ipsam jungi, neque adeò plus semel in eadem combinatione accipi posse. Quod si autem hæc insuper conditio adjici velit, ut unaquæque res etiam secum ipsa jungi, adeoque in eadem combinatione sæpius redire queat; tum numerus combinationum multo major evadet. Sed eidem methodo insistendo, facile erit has quoque combinationes invenire.

Sunto itaque combinandæ in hunc modum litteræ *a*, *b*, *c*, &c. Fiant tot series, quot litteræ; & singularum capita occupent singulæ litteræ, ceu totidem uniones. Sed pro binionibus cujusque seriei inveniendis, littera, quæ ejus agmen ducit, non tantùm cum præcedentibus unionibus, sed etiam cum se ipsa combinetur. Et similiter pro formandis ternionibus, non modò præcedentium serierum, sed etiam suæmet seriei biniones assumat. Idemque fiat etiam in combinationibus secundùm omnes alios exponentes. Sic enim nullam combinationem, quæ circa datas res institui queunt, præteriri posse liquidò constat.

Hinc

a. aa. aaa.
b. ab. bb. aab. abb. bbb
c. ac. bc. cc. aac. abc. bbc. acc. bcc. ccc.

Hinc autem clarè liquet, in unaquaque ſerie numerum combinationum ſecundùm datum quemvis exponentem æqualem eſſe numero combinationum ſecundùm exponentem unitate unâ minorem, quæ tum in ipſa, cum in præcedentibus ſeriebus inveniuntur: proindeque eadem tabula ſuperiùs conſtructa deſignabit combinationes ſecundùm ſingulos exponentes, quæ occurrunt in unaquaque ſerie, ſi ex columnis verticalibus deletis cifris initialibus, attollantur eæ ſurſum, donec omnia cujuſque loca repleantur, & unaquæque incipiat ab unitate, quemadmodum factum hìc vides.



TA-

TABULA

Combinationum, in quibus eadem res sæpius recurrere potest.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8
3	1	3	6	10	15	21	28	36
4	1	4	10	20	35	56	84	120
5	1	5	15	35	70	126	210	330
6	1	6	21	56	126	252	462	792
7	1	7	28	84	210	462	924	1716
8	1	8	36	120	330	792	1716	3432
9	1	9	45	165	495	1287	3003	6435
10	1	10	55	220	715	2002	5005	11440

Jam

Jam in numeris hujus tabulæ duas licet cernere proprietates. Prima est, quod si alicujus columnæ verticalis termini quotcumque in unum addantur, summa sit terminus, qui ultimo correspondet in sequenti columna verticali. Altera, quod in unaquaque columna verticali si terminus aliquis multiplicetur per numerum terminorum præcedentium, tot unitatibus adauctum, quot columnæ locus ostendit, & productum dividatur per numerum ejusdem columnæ, quotiens sit summa ipsius cum terminis præcedentibus.

His positis proprietatibus, haud difficile modo erit, terminos quotcumque cujuslibet columnæ verticalis in unam summam colligere. Sumantur etenim ab initio termini æque multi in unaquaque columna, & referat eorum multitudinem littera a. Itaque, quia in prima columna quisque terminus est unitas, designabit eadem littera a, sive $\frac{a}{1}$ summam ipsorum, quæ etiam per primam proprietatem erit ultimus terminus ex assumptis in secunda columna. Unde si eadem multiplicetur per $a+1$, & productum dividatur per 2; erit per secundam proprietatem quotiens $\frac{a \,.\, a+1}{1 \,.\, 2}$ summa terminorum in secunda columna.

Et similiter, quia hæc eadem summa est ultimus terminus ex assumptis in tertia columna, si ea multiplicetur per $a+2$, & productum dividitur

datur per 3, erit quotiens, $\frac{a \,.\, a+1 \,.\, a+2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$ ſumma terminorum in tertia columna. Atque eidem methodo inſiſtendo, ſumma terminorum erit $\frac{a \,.\, a+1 \,.\, a+2 \,.\, a+3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4}$ in quarta columna; $\frac{a \,.\, a+1 \,.\, a+2 \,.\, a+3 \,.\, a+4}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5}$ in quinta columna; atque ita deinceps.

Patet autem, ſummam illam deſignari per duplicem progreſſionem arithmeticam, utramque aſcendentem per unitatis incrementum, unam à multitudine aſſumpta terminorum, alteram ab unitate, & utramque tot terminorum quot unitates continet numerus columnæ. Quocirca, quia eadem ſumma deſignat combinationes omnes, quæ fiunt ex totidem rebus, quot ſunt termini aſſumpti, ſecundùm eum exponentem, quem columnæ numerus deſignat, & eâ lege, ut unaquæque res non ſolum cum aliis, ſed etiam cum ſe ipſa jungi poſſit; perſpicuum eſt, ad inveniendas omnes hujuſmodi combinationes, quæ fieri poſſunt ex pluribus rebus ſecundum datum quemvis exponentem, hanc regulam obſervandam eſſe.

Nimirum, fiant duæ progreſſiones arithmeticæ, ambæ aſcendentes per unitatis incrementum, una quidem a numero rerum combinandarum, altera ab unitate, & utraque tot terminorum, quot unitates habet combinationis exponens. Multiplicentur deinde inter ſe mutuò, tam termini prioris progreſſionis, quàm termini

mini alterius; & diviso producto ex primis per productum ex secundis, erit quotiens quæsita multitudo combinationum, quæ secundum datum exponentem institui possunt eâ lege, ut quælibet res non solùm cum aliis, sed etiam cum se ipsa combinata reperiatur.

CAP. V.

De Combinationibus, in quibus ordo situsve rerum etiam attenditur.

DIximus capite secundo, combinationes vocari rerum conjunctiones, in quibus nulla ordinis situsve rerum habitâ ratione, dumtaxat multitudo consideratur, secundùm quam res datæ simul sunt conjungendæ: qua ratione litteræ *a*, *b*, *c* unum constituunt ternarium, quocumque ordine scribantur. Quod si porro hæc alia hypothesis assumi velit, ut in combinationibus etiam varietas, quæ oritur ex ordine, sive situ rerum combinandarum, sit attendenda; tunc multitudo combinationum longè quidem major evadet: unde qua ratione definiri possit, hoc Capite ostendemus.

Et quidem si rerum combinationes subinde fieri debeant, ut unaquæque res numquam sæpius, quàm semel, id singulis combinationibus recurrat; perspicuum est, unamquamque combinationem ratione ordinis, sive situs litterarum toties esse reiterandam, quot modis diversis permutari possunt litteræ, quæ existunt in ipsa combinatione: proindeque habebitur multitudo combinationum, quæ fieri possunt ex pluribus rebus secundùm datum quemvis exponentem

rem

tem ea lege, ut ordo ſituſve rerum etiam inducat variationem, ſi numerus combinationum, quæ ex iiſdem rebus ſecundùm eum exponentem, hac lege neglecta, inſtitui poſſunt, multiplicetur per numerum permutationum diverſarum, quas ſubire poſſunt tot res diverſæ, quot unitates continet datus exponens.

Jam ex oſtenſis in Capite tertio numerus combinationum, quæ ex pluribus rebus ſecundùm datum quemvis exponentem ſimpliciter inſtitui poſſunt, habetur, ſi factis duabus progreſſionibus arithmeticis, unâ a dato rerum numero per unitatis decrementum deſcendente, alterâ aſcendente ab unitate per unitatis incrementum, & utraque tot terminorum, quot unitates continet datus exponens, dividatur productum ex terminis primæ per productum ex terminis ſecundæ. Quocirca, quia per oſtenſa in Capite primo productum ex terminis ſecundæ deſignat numerum permutationum diverſarum, quas ſubire poſſunt tot res diverſæ, quot ſunt unitates in dato exponente; deſignabit productum ex terminis primæ numerum combinationum, quæ ex iiſdem rebus ſecundùm eumdem exponentem fieri poſſunt eâ lege ut ex ordine ſituque rerum variatio etiam oriatur.

Hinc ad inveniendas combinationes omnes, quæ inſtitui poſſunt ex pluribus rebus ſecundùm datum quemvis exponentem eâ lege, ut ordo ſituſve rerum etiam variationem inducat, talis regula nobis ſubnaſcitur: nempe fiat progreſſio arithmetica deſcendens a dato rerum numero per unitatis decrementum, & tot terminis conſtans, quot unitates continet datus

tus

tus exponens; deinde multiplicentur inter se mutuò termini omnes hujus progressionis, & productum ex hac multiplicatione ortum dabit combinationum multitudinem quæsitam. Ex quo illud inferre licet, quod ubi datus exponens numerum rerum adæquat, quia in progressione ad unitatem usque descenditur, tantumdem fit, ac si simplices permutationes datarum rerum quærerentur.

Quod si autem rerum combinationes subinde institui debeant, ut unaquæque res etiam cum se ipsa conjungi possit; tunc numerus combinationum omnium habebitur, si datus rerum numerus elevetur ad eam potestatem, quam designat datus combinationis exponens, hoc est ad quadratum, si exponens datus sit 2, ad cubum, si 3; ad quadrato-quadratum, si 4; atque ita deinceps. Qua ratione trium rerum diversarum biniones omnes modis omnibus permutati sunt 9; terniones 27; quaternions 81, &c. Pariterque si datus rerum numerus sit 4, erunt 16 omnes biniones, 64 omnes terniones, 256 omnes quaterniones, atque ita in infinitum.

Nec difficile est hujus regulæ rationem intelligere. Dentur enim plures litteræ *a*, *b*, *c*, *d*, &c., quarum numerus sit *m*, combinandæ in hunc modum, ut unaquæque littera possit secum ipsa jungi, & ordo situsve litterarum etiam variationem inducat. Planè si iis præponatur littera *a*, habebuntur biniones omnes, qui incipiunt ab *a*; si littera *b*, biniones omnes, qui incipiunt à *b*; atque ita de aliis. Itaque series binionum, pro diversitate litterarum, a quibus incipiunt, tot erunt, quot

sunt unitates in dato numero *m*, & unaquæque series totidem quoque biniones continebit, quot in eodem numero sunt unitates: proindeque erit *mm*, hoc est quadratum numeri *m* binionum omnium numerus.

Jam istis binionibus si præponatur littera *a*, habebuntur terniones omnes, qui incipiunt ab *a*; si littera *b*, terniones omnes, qui incipiunt à *b*; atque ita de aliis. Quocirca series ternionum, pro diversitate litterarum, a quibus incipiunt, tot erunt, quot sunt unitates in dato numero *m*; sed unaquæque series tot terniones continebit, quot sunt biniones, hoc est quot unitates continet quadratum dati numeri *m*: proindeque erit $m3$, hoc est cubus ejusdem numeri *m* ternionum omnium numerus.

Eadem ratione si istis ternionibus præfigatur littera *a*, habebuntur quaterniones omnes, qui incipiunt ab *a*: si littera *b*, quaterniones omnes, qui incipiunt à *b*; atque ita deinceps. Quocirca series quaternionum, pro diversitate litterarum a quibus incipiunt, tot erunt, quot sunt unitates in dato litterarum numero *m*: sed unaquæque series tot quaterniones continebit, quot sunt terniones, hoc est quot unitates continet cubus dati numeri *m*: proindeque erit $m4$, hoc est quadrato-quadratum ejusdem numeri *m* numerus omnium quaternionum.

Atque hæc de permutationibus, combinationibusque in Tyronum gratiam dixisse sufficiat. Cæterum nolim hic silentio præterire, numeros columnarum verticalium utriusque tabulæ, superius constructæ, esse ex numero eorum, qui

qui vulgo a Recentioribus dicuntur numeri figurati: unde hac arrepta occasione non abs re erit, in eorumdem Tyronum gratiam istorum quoque numerorum brevem aliquam ideam hoc loco exhibere. Et quoniam eorum consideratio profecta est ex contemplatione numerorum multangulorum ab ipsis Veteribus factâ; proinde qui sint numeri multanguli, sive polygoni, ante omnia explicandum nobis erit.

CAP. VI.

De numeris multangulis, sive polygonis.

NUmeri multanguli, sive polygoni dicuntur, qui oriuntur ex continua collectione aliorum æquali intervallo ab unitate progredientium: & pro diversitate hujus intervalli variæ distinguuntur numerorum multangulorum species: nam dicuntur trianguli, si intervallum sit unitas; dicuntur quadrati, si intervallum sit binarius; pentagoni, si idem intervallum sit ternarius; atque ita deinceps.

Hac ratione si numeri, ab unitate æquali intervallo progredientes, sint ipsi numeri naturales 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, &c.; quia intervallum, quo numeri progrediuntur, est unitas, habebuntur ex eorum continuâ collectione omnes numeri trianguli. Qua ratione 1 erit primus triangulus; 1 + 2, sive 3 erit triangulus secundus; 1 + 2 + 3, sive 6 triangulus tertius; atque ita in infinitum.

Quod si numeri ab unitate æquali interval-

lo progredientes sint numeri impares naturales 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, &c.; quia intervallum, quo numeri progrediuntur, est numerus binarius, orientur ex continua illorum collectione omnes numeri quadrati. Qua ratione: erit primus quadratus; 1 + 3, sive 4 erit quadratus secundus; 1 + 3 + 5, sive 9 quadratus tertius; atque ita continuò.

Jam si series numerorum, æquali intervallo ab unitate progredientium, sit 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, &c.; quia intervallum, quo numeri progrediuntur, est numerus ternarius, orientur ex eorum collectione continua omnes numeri pentagoni. Qua ratione 1 erit primus pentagonus; 1+4, sive 5 erit pentagonus secundus; 1+4+7, sive 12 erit pentagonus tertius; & sic in infinitum.

Eâdem autem ratione si series numerorum, qui æquali intervallo ab unitate progrediuntur, sit 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, &c.; quia intervallum, quo numeri progrediuntur, est numerus quaternarius, habebuntur ex continua illorum collectione numeri omnes hexagoni. Qua ratione 1 erit primus hexagonus; 1 + 5, sive 6 erit hexagonus secundus; 1 + 5 + 9, sive 15 erit haxagonus tertius, atque ita deinceps.

Et similiter si series numerorum, progredientium æquali intervallo ab unitate, sit 1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, &c.; quia intervallum, quo numeri progrediuntur, est numerus quinarius, producentur ex eorum collectione continua numeri omnes heptagoni. Qua ratione 1 erit primus heptagonus; 1+6, sive 7 erit heptagonus secundus; 1 + 6 + 11, sive 18 hepta-

heptagonus tertius; atque ita de aliis.

Hos numeros polygonos, sive multangulos, prout ex Veterum monumentis colligere licet, consideravit primùm Hypsicles, qui genesim ipsorum hac definitione complexus est. Si fuerint quotcumque numeri, ab unitate æquali intervallo progredientes; summa omnium erit triangulus, si intervallum sit unitas; quadratus, si binarius; pentagonus, si ternarius; hexagonus, si quaternarius, atque ita deinceps.

Et quoniam numerus angulorum in hac Hypsiclis definitione per numerum binario majorem intervallo, quo numeri ab unitate progrediuntur, designatur; proinde Diophantus eandem illam definitionem sic generaliter concepit. Si fuerint quotcumque numeri ab unitate æquali intervallo progredientes, omnium summa multangulus erit, totque angulos continebit, quot numerus binario superans intervallum, habet unitates.

Hujusmodi porro numeri dicti sunt multanguli, sive polygoni, quia ipsorum unitates per æqua intervalla in polygoni æquilateri formam disponi possunt: nimirum numeri trianguli in formam trianguli æquilateri; numeri quadrati in formam quadrati, aut etiam rhombi; atque ita de aliis. Unde definiri quoque possunt numeri multanguli, sive polygoni, quorum unitates æqualibus intervallis multangulum, sive polygonum æquilaterum exhibent.

Ex quo patet, unumquemque numerorum, a ternario per unitatis incrementum progredientium multangulum esse, totque angulos, sive latera continere, quot unitates continet ipse numerus. Hac ratione 3 est triangulus,

sive numerus trium angulorum; 4 quadratus, sive numerus quatuor angulorum; 5 pentagonus, sive numerus quinque angulorum; atque ita de aliis. Et ratio est, quia unitates cujuslibet illorum numerorum subinde per æqua intevalla disponi possunt, ut repræsentent figuram totidem laterum æqualium.

Et quoniam ipsa unitas virtualiter est omnis multangulus. Est enim, & triangulus, & quadratus, & pentagonus, & hexagonus, quum horum omnium multangulorum proprietates unitati ipsi conveniant: proinde quilibet numerus a ternario erit multangulus in sua specie primus ab unitate: nimirum 3 primus triangulus, 4 primus quadratus, 5 primus pentagonus, 6 primus hexagonus, atque ita in infinitum.

Jam quisque numerus multangulus, sive sit primus ab unitate, sive alius quilibet, si unitatibus suis per æqua intervalla dispositis multangulum ipsum exhibeat, eum numerum habebit pro suo latere, qui tot continet unitates, quot sunt termini, ex quorum collectione oritur datus numerus multangulus. Sic quia numerus triangulus 10 oritur ex collectione quatuor terminorum 1, 2, 3, 4, habebit ille pro suo latere numerum 4. Pariterque quia numerus quadratus 25 producitur ex collectione *quinque* terminorum 1, 3, 5, 7, 9, erit latus ejus numerus 5.

Atque hinc circa hujusmodi numeros multangulos, sive polygonos duo potissimùm problemata institui solent; quorum primum est, dato latere, invenire multangulum datæ speciei; alterum, dato multangulo, ejusque specie,

cie, ejusdem latus determinare. Sed ex iis, quæ de istorum numerorum genesi dicta sunt, perspicuum est horum problematum solutionem ab his aliis pendere: dato numero terminorum, qui ab unitate dato intervallo progrediuntur, summam omnium invenire; & vicissim datâ summâ plurium terminorum, ab unitate dato intervallo progredientium, numerum eorum indagare. Unde quia hæc duo Problemata jam solutionem acceperunt a Tacqueto libro quinto Arithmeticæ Practicæ capite secundo, frustra iis immorabimur.

CAP. VII.

De Numeris figuratis.

EX numeris multangulis, sive polygonis profecta est consideratio numerorum, qui dicuntur figurati. Quemadmodum etenim inter Veteres Hypsicles, & post eum Diophantus considerarunt numeros, qui oriuntur ex continua collectione aliorum æquali intervallo ab unitate progredientium, eosque multangulos, sive polygonos numeros appellarunt, quia unitates ipsorum, per æqua intervalla dispositæ, multangulum, sive polygonum æquilaterum repræsentant; sic Recentiores ulteriùs progressi considerarunt numeros alios, qui generantur ex continua ipsorum multangulorum, indeque ortorum numerorum additione, vel collectione, & tam hos, quàm illos numeros figuratos appellarunt; quia scilicet unitatibus ipsorum per æqua intervalla dispositis diversimode possunt configurari.

Quocirca numeri figurati Recentioribus dicuntur non modò ii, qui oriuntur ex continua collectione aliorum æquali intervallo ab unitate progredientium; verùm etiam, qui ex continua inde ortorum numerorum additione generantur. Ex quo patet, numeros istos figuratos, non modò in varia genera distingui posse pro diversitate intervalli, quo numeri genitores, hoc est ab initio assumpti ab unitate progrediuntur; sed & ipsos cujusque generis numeros in varios ordines dividi posse pro diversa ratione, qua ex iisdem illis numeris genitoribus, sive ab initio assumptis generari intelliguntur.

Hac ratione, si intervallum, quo numeri genitores ab unitate progrediuntur, sit unitas, numeri figurati exinde geniti dici poterunt primi generis. Sed nihilominus in hoc eodem genere quemadmodum dicuntur numeri genitores ipsi illi numeri, qui ab unitate per unitatis incrementum progrediuntur, ita dici poterunt numeri figurati primi ordinis qui oriuntur ex additione numerorum genitorum: numeri figurati secundi ordinis, qui oriuntur ex collectione continua eorum, qui sunt ordinis primi; numeri figurati tertii ordinis, qui gignuntur ex continua collectione eorum, qui sunt ordinis secundi; atque ita deinceps.

Similiter si intervallum, quo numeri genitores, sive ab initio assumpti ab unitate progrediuntur, sit numerus binarius; numeri figurati, qui ex iis procreantur, vocari poterunt secundi generis. Sed in hoc eodem genere quemadmodum dicuntur numeri genitores ipsi illi numeri, qui ab unitate per binarii incrementum

pro-

progrediuntur; ita quoque dici poterunt numeri figurati primi ordinis, qui oriuntur ex ipsa numerorum genitorum additione; numeri figurati secundi ordinis, qui oriuntur ex additione eorum, qui sunt ordinis primi; numeri figurati tertii ordinis, qui ex additione eorum, qui sunt ordinis secundi, generantur; atque ita in infinitum.

Ex quibus jam liquet id, quod superiùs in calce Capitis quinti dictum fuit, nimirum numeros columnarum verticalium utriusque tabulæ superiùs constructæ esse ex numero eorum, qui vulgò dicuntur a Recentioribus numeri figurati. In utraque namque illarum tabularum numeri unius columnæ verticalis ab initio collecti dant numeros sequentis columnæ verticalis. Itaque quia in secunda columna verticali habentur omnes numeri naturales, hoc est qui ab unitate per unitatis intervallum progrediuntur; perspicuum est, in columnis illis contineri numeros figuratos primi generis, ita quidem, ut quemadmodum in secunda columna existunt numeri genitores, sic in tertia sint numeri figurati primi ordinis, in quarta numeri figurati ordinis secundi, in quinta numeri figurati ordinis tertii, atque ita deinceps. Sed in prima cujusque tabulæ columna verticali existit series unitatum, ex quarum continua collectione numeri naturales in secunda columna existentes producuntur.

Jam numeri isti figurati miras habent proprietates, quæ ad Tyrones exercendos non parum conducunt. Sed sufficiat in iis, qui primi generis sunt, istam adnotare: nimirum, quod si ii ita disponantur, quemadmodum in

prima

prima tabula cernere licet: adeo ut in prima columna verticali sit series unitatum, in secunda series numerorum naturalium, tum in aliis sint ipsi numeri figurati, qui ex continua illorum additione oriuntur; & unaquæque columna tot cifras habeat in principio, quot numerus columnæ continet unitates, unâ demptâ: quod inquam numeri columnarum transversalium exhibeant ordine coëfficientes omnium potestatum, a radice aliqua binomia, ut $a + b$, genitarum.

Nam coefficientes ipsius radicis $a + b$ sunt numeri 1, 1, qui reperiuntur in secunda columna transversali; coefficientes quadrati $a2 + 2ab + b2$ sunt numeri 1, 2, 1, qui reperiuntur in tertia; coefficientes cubi $a3 + 3a2b + 3ab2 + b3$ sunt numeri 1, 3, 3, 1, qui occurrunt in quarta; coefficientes quadrato-quadrati $a4 + 4a3b + 6a2b2 + 4ab3 + b4$ sunt numeri 1, 4, 6, 4, 1, qui occurrunt in quinta, atque ita deinceps. Quocirca si prior illa tabula in infinitum continuetur, ope ejus facile quidem erit quamcumque radicem binomiam ad quamlibet datam potestatem attollere.

Tota quippe difficultas, quæ in formatione potestatum occurrit, consistit potissimùm in eo, ut inveniantur coefficientes, quibus afficiendi sunt termini potestatum. Nam quantùm ad ipsos terminos, habentur ii nullo negotio, si constitutis duabus progressionibus geometricis, quarum exponentes sint ipsæ partes radicis binomiæ propositæ, & quarum una a quæsita sui exponentis potestate descendat usque ad unitatem, altera vicissim ab unitate ascendat usque ad potestatem quæsitam sui

ſui exponentis; multiplicentur termini unius progreſſionis per correſpondentes terminos alterius.

Ut ſi velim exempli gratiâ invenire terminos cubi ex radice binomia $a+b$, conſtituo duas progreſſiones geometricas, quarum una habens pro ſuo exponente partem a deſcendat à cubo ipſius a uſque ad unitatem, altera habens pro ſuo exponente partem b aſcendat viciſſim ab unitate uſque ad cubum ipſius b: nam quum iſtarum progreſſionum una ſit $a3$, $a2$, a, 1; altera 1, b, $b2$, $b3$: multiplicatis ordine terminis unius progreſſionis per terminos alterius, fient termini cubi quæſiti $a3$, $a2b$, $ab2$, $b3$.

Similiter ſi inveniendi ſint termini quadrato-cubi ex radice binomia $a+b$, formentur duæ progreſſiones geometricæ, quarum una habeat pro ſuo exponente partem a, & à quadrato cubo ipſius a deſcendat uſque ad unitatem, altera habeat pro ſuo exponente partem b, & viciſſim ab unitate aſcendat uſque ad quadrato-cubum ipſius b. Quum enim iſtarum progreſſionum una ſit $a5$, $a4$, $a3$, $a2$, a, 1; altera 1, b, $b2$, $b3$, $b4$, $b5$: multiplicatis terminis unius progreſſionis ordine per terminos alterius, fient termini quadrato-cubi quæſiti $a5$, $a4b$, $a3b2$, $a2b3$, $ab4$, $b5$.

Quum, itaque termini cujuſcumque poteſtatis ex radice aliqua binomia facili negotio habeantur, liquet, totam difficultatem in formatione poteſtatum in eo ſitam eſſe, ut inveniantur coefficientes, quibus ii termini ſunt afficiendi. Unde ſemper ac iſti coefficientes reperiantur ordine in columnis tranſverſalibus

præ-

prædictæ tabulæ; perspicuum est, eâ mediante facillimè quamcumque radicem binomiam ad quamlibet datam potestatem posse elevari. Interim si recordemur earum proprietatum, quas circa numeros illius tabulæ Capite tertio recensuimus, poterimus formulam quamdam generalem nobis cudere, qua mediante vel solius substitutionis ope quælibet radix binomia ad quamcumque potestatem elevabitur. Quod quia a nobis præstitum est in nostris Algebræ Elementis, quæ propediem lucem adspicient, ab eo hic consulto nos abstinemus, ne sæpius eamdem rem proferre videamur.

FINIS

In-

INDEX CAPITUM,

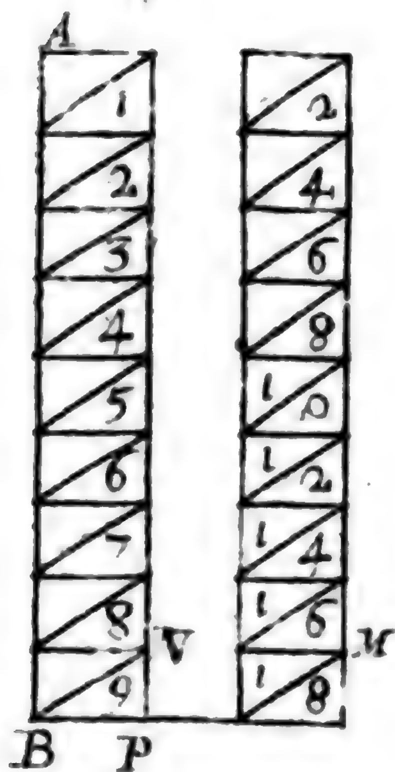
Quæ in hoc Opuſculo continentur.

---

igorica.

C

6	7	8	9
12	14	16	18
18	21	24	27
24	28	32	36
30	35	40	45
36	42	48	54
42	49	56	63
48	56	64	72
54	63	72	81



TAB. I.

Tabula

A D

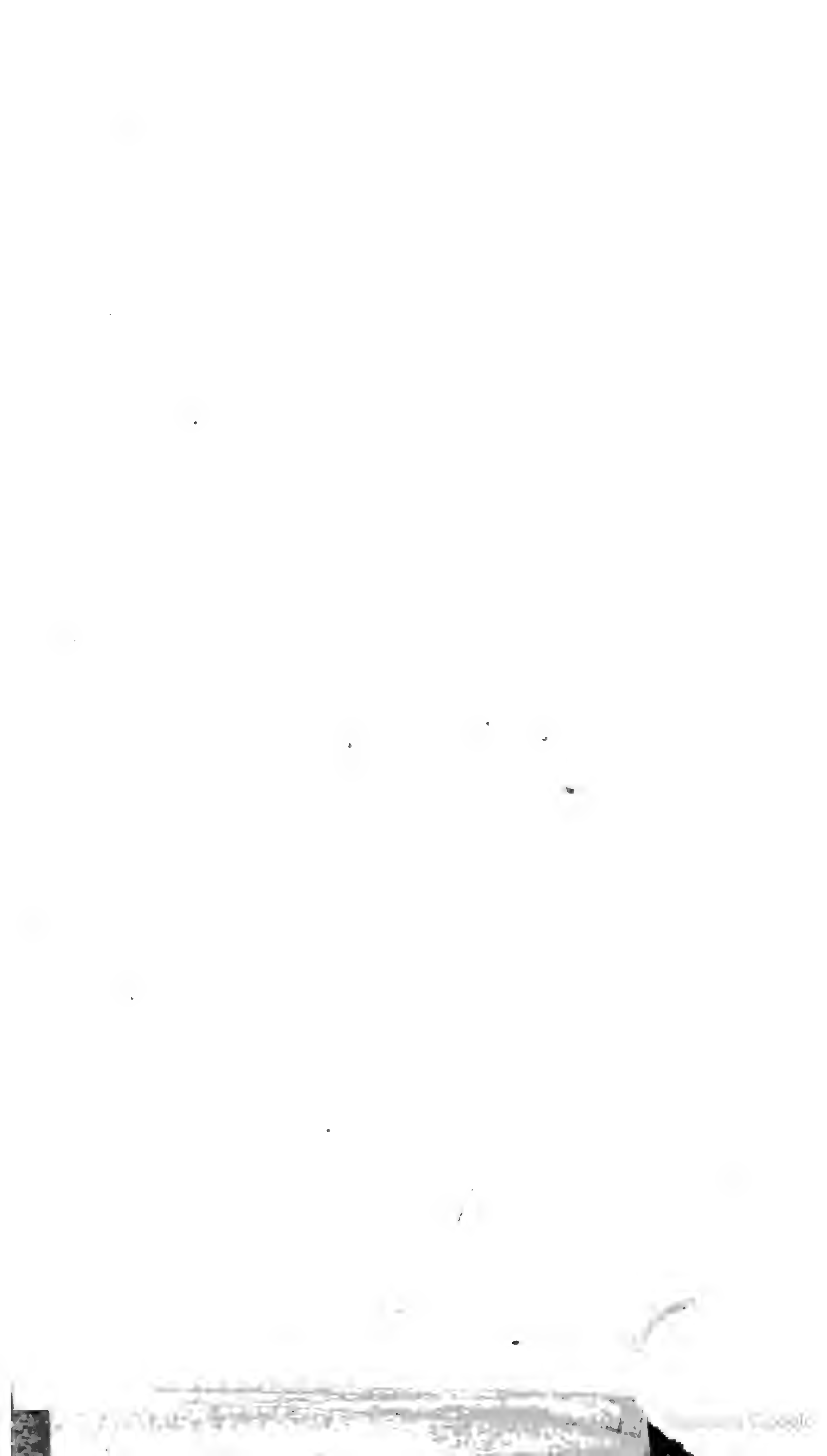
1	2	3
2	4	6
3	6	9
4	8	12
5	10	15
6	12	18
7	14	21
8	16	24
9	18	27

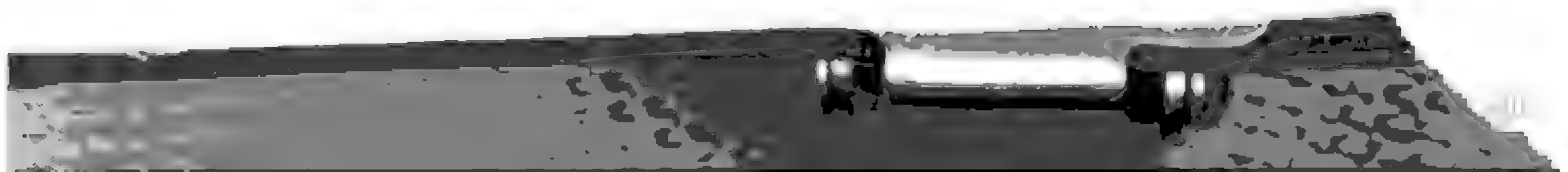
B E

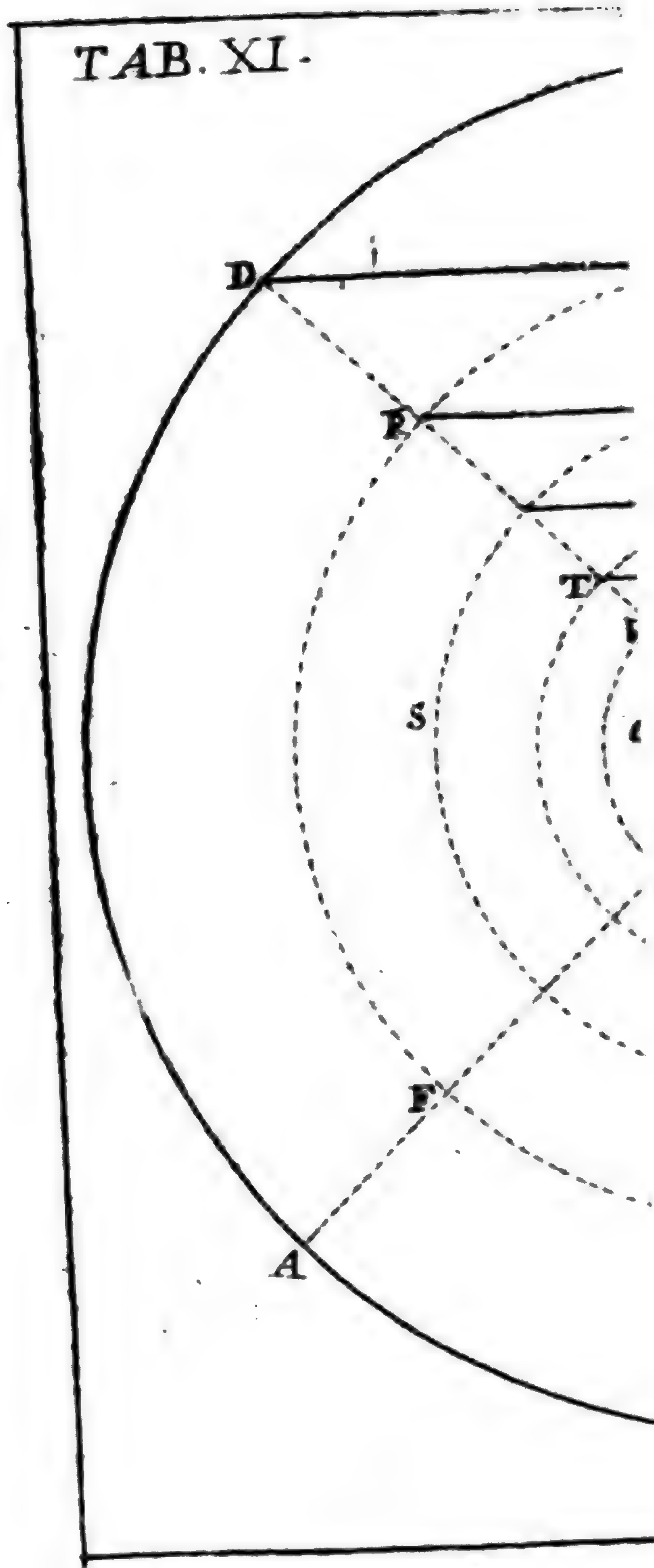
X

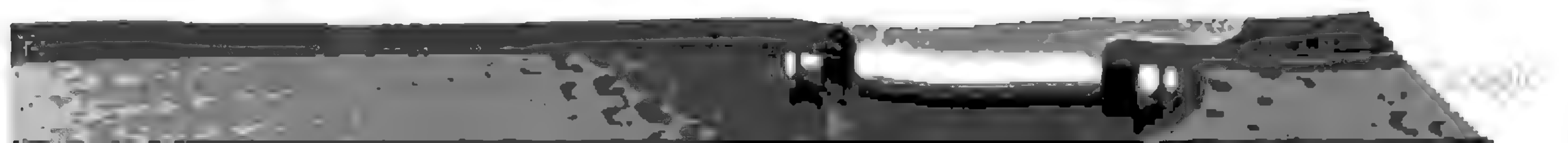
1	5	9
2	1/0	1/8
3	1/5	2/7
4	2/0	3/6
5	2/5	4/5
6	3/0	5/2
7	3/5	6/3
8	4/0	7/2
9	4/5	8/1

Z 5 3 7 3






TAB. XI.
D
E
T
S
F
A



A 546293
UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 06389 4680

Digitized by Google